TP : projection orthogonale

Le but de ce TP est de calculer étant donnée une fonction f et un entier n la fonction polynomiale de degré au plus n la plus proche de f sur un intervalle fixé. Ceci nous fera réviser la méthode des trapèzes, le pivot de Gauss, et la géométrie euclidienne.

Exercice 1. ** Le programme du pivot de Gauss

Coder le programme du pivot de Gauss. On pourra utiliser les fonctions intermédiaires suivantes :

1. `echangeLigne`, `dilatation` et `transvection` qui effectuent les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice.
2. `AnnuleLigne` qui prend en entrée la position du pivot et utilise celui-ci pour annuler les coefficient au dessus et au dessous.

Calculer la complexité de ce programme.

Exercice 2. * Structure euclidienne de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, et on pose $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Programmer les opérations suivantes, qui permettent de munir E d'une struture d'espace euclidien :

1. Somme, produit par une constante.
2. Produit scalaire usuel.

Exercice 3. ** Gram-Schmidt

On se place dans l'espace $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ programmé dans l'exercice 2.

1. Programmer l'algorithme de Gram-Schmidt. Votre programme final prendra en entrée une famille libre et renverra une famille orthonormée qui engendre le même espace.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrire un programme calculant le projeté orthogonal d'un élément de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ sur l'espace des fonctions polynomial de degré au plus n, qu'on pourra par abus de notation noter $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 4. ** Projection orthogonale sans base orthonormée

Comme dans les exercices précédents, on fixe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $E = \mathcal{C}\left([a,b],\mathbb{R}\right)$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et F_n l'espace des fonctions polynomiales de degré au plus n.

Le but de l'exercice est de calculer le projeté orthogonal d'une fonction $f \in E$ sur F_n. On notera p_n la projection orthogonale sur F_n.

1. Soit $f \in E$ et $a_0, ..., a_n$ les coefficients de $p_n(f)$. En utilisant le fait que $p_n(f) - f \perp F_n$, écrire un système d'équations vérifié par $a_0, ..., a_n$ et prouver que ce système est de Cramer.
2. Écrire un programme pour calculer $a_0, ..., a_n$.
3. Tracer la courbe de $a_0 + a_1 X + ... a_n X^n$ et celle de f sur l'intervalle $[a,b]$.
4. Dans le cas $n = 1$, $p_n(f)$ porte un nom très connu. Lequel ?

Indication : 1) Utiliser la base canonique de F.