Devoir en temps libre : la phrase mathématique

Le langage et la logique mathématiques peuvent être utilisés dans n'importe quel contexte. Bien sûr, dans le programme de PCSI, *nous les utiliserons à l'étude des nombres réels, des fonctions, à la géométrie, la physique, etc. Mais en attendant, voici un problème traitant d'un sujet n'ayant absolument rien de scientifique.*

Dans ce problème, on notera $\mathcal{H}$ l'ensemble des hommes et $\mathcal{F}$ l'ensemble des femmes. Définissons la relation « être amoureux » : pour tous $h \in \mathcal{H}$ et $f \in \mathcal{F}$, notons $h \heartsuit f$ lorsque h aime f. De même on notera $f \heartsuit h$ lorsque f aime h, et similairement pour deux hommes ou deux femmes. Enfin, la négation de cette relation pourra être notée $\not\heartsuit$. Ainsi, $h \not\heartsuit f$ signifiera que h n'aime pas f.

À titre d'exemple, exprimons la phrase « chaque homme est amoureux d'une femme ». Nous voulons dire que pour chaque homme h, il existe une femme f telle que h aime f. Cela s'écrit :

$$\forall h \in \mathcal{H}, \exists f \in \mathcal{F} \text{ tq } h \heartsuit f.$$

On rappelle qu'en mathématiques, « une » signifie « au moins une », et non pas « exactement une ».

Dans les exercices qui suivent, il y a généralement plusieurs réponses possibles. Dès que la réponse n'est pas directement évidente, expliquez-la. Par ailleurs, on ne se préoccupera pas de savoir si les assertions considérées sont vraies ou fausses.

Commentaires généraux

- Le mot « avec » est trop vague en mathématiques. Selon le cas, il peut vouloir dire « tel que », ou bien « il existe », à charge au lecteur de deviner ! C'est pourquoi on conseille tout simplement de ne jamais l'utiliser en maths.
  Remarque : La virgule aussi est parfois utilisée (à tort) pour signifier « il existe ». Par exemple, en terminale pour résoudre l'équation $\cos(x) = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, vous avez peut-être écrit :
  $$\cos(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$
  C'est un abus de langage, la rédaction correcte est :
  $$\cos(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } x = \pi + 2k\pi.$$
- Un « tq » s'utilise (et c'est facultatif) avec « $\exists$ ». De même, après un $\forall$, on peut utiliser « on a ».
- Les quantificateurs ne sont pas forcément tous en début de phrase ! Il faut réfléchir attentivement à leur place...
- Quand on passe à la négation, les quantificateurs et parenthèses restent à la même place.
- Les variables B, J, M, D sont définies par l'énoncé. Ce qui signifie que vous ne devez pas les redéfinir : pas de $\exists M \in \mathcal{H}$.

- Sauf cas particulier, une implication fonctionne toujours avec un $\forall$. On ne voit pas trop ce qu'une phrase telle que $\exists h \in \mathcal{H}$ tq $(h \heartsuit J \Rightarrow B \heartsuit h)$ pourrait signifier... [1]
- Une notation comme « $h \heartsuit (f_1 + f_2)$ » n'a pas de sens. Que signifie ajouter deux femmes entre elles ? Pour dire que h aime à la fois f_1 et f_2, écrivez « $h \heartsuit f_1$ et $h \heartsuit f_2$ ».
  L'opération d'addition est définie pour différents types d'objets : nombres, fonctions, vecteurs... Mais pas pour les femmes ! Un des points sur lesquels vous devrez toujours être vigilant en mathématiques est de savoir quel type d'objet vous êtes en train de manipuler et quelles opérations existent pour ce type d'objet.
  Par exemple, dans ce problème nous manipulons des formules mathématiques. Les opérations possibles sur des formules sont essentiellement « et », « ou », « $\Rightarrow$ » et « non ».
- Le mot « donc » est différent de « implique ». Rappelons que « donc » s'utilise lorsqu'on *sait* que l'assertion de départ est vraie. Il n'y en avait aucun dans ce problème. Pour traduire $A \Rightarrow B$ en français on peut écrire « A implique B », ou « si A était vrai alors B le serait aussi » : on reste dans l'hypothèse, on n'est sûr de rien.
  Un « donc » s'utilise lorsqu'on effectue une *déduction*. On l'emploie de cette manière : « on sait que $A \Rightarrow B$, or on sait aussi que A est vrai, *donc* B est vrai. »

Thème

Écrire les assertions suivantes sous forme de formules mathématiques :

1. Tous les hommes aiment toutes les femmes.
   $\forall h \in \mathcal{H}, \forall f \in \mathcal{F}, h \heartsuit f$.
2. Chaque femme aime un unique homme.
   $\forall f \in \mathcal{F}, \exists! h$ tq $f \heartsuit h$.
3. Certaines femmes aiment deux hommes.
   $\exists f \in \mathcal{F}, \exists (h_1, h_2) \in \mathcal{H}^2$ tq $(f \heartsuit h_1$ et $f \heartsuit h_2$ et $h_1 \neq h_2)$.
   Attention de ne pas oublier le $h_1 \neq h_2$!
4. Il existe une femme amoureuse d'elle-même.
   $\exists f \in \mathcal{F}$ tq $f \heartsuit f$.
5. Certains hommes aiment un homme et une femme.
   $\exists h \in \mathcal{H}, \exists h' \in \mathcal{H}, \exists f \in \mathcal{F}$ tq $(h \heartsuit f$ et $h \heartsuit f')$.
6. Tout le monde aime tout le monde.
   Il faut exprimer que toutes les femmes aiment toutes les femmes, toutes les femmes aiment tous les hommes, tous les hommes aiment tous les hommes, et tous les hommes aiment toutes les femmes. Voici une manière un peu condensée de l'écrire :
   $$\forall (f, f', h, h') \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \times \mathcal{H} \times \mathcal{H}, \quad (f \heartsuit h \text{ et } f \heartsuit f' \text{ et } h \heartsuit f \text{ et } h \heartsuit h').$$
   En utilisant la réunion ($\cup$) on peut condenser encore plus :
   $$\forall (x, y) \in (\mathcal{F} \cup \mathcal{H})^2, \quad x \heartsuit y.$$

1. Mathématiquement, elle a un sens. Mais il n'y a pas de traduction simple dans le langage courant, et vous n'en aurez pas l'utilité à moins que vous ne suiviez un véritable cours de logique.

Version

Que signifient les assertions suivantes ?

1. $\exists f \in \mathcal{F}$ tq $\forall h \in \mathcal{H}, h \heartsuit f$.

   « Certaines femmes sont aimées de tous les hommes. »

   Remarque : Ici, l'expression « certaines femmes » est à prendre au sens « au moins une », même si le pluriel semblerait signifier « au moins deux »...

2. $\forall h \in \mathcal{H}, \exists f \in \mathcal{F}$ tq $h \heartsuit f$.

   « Tout homme aime (au moins) une femme. »

   N.B. Entre cette phrase et la précédente, seul l'ordre des quantificateurs a changé, et le sens n'est plus du tout le même ! Dans « $\exists f \in \mathcal{F}$ tq $\forall h \in \mathcal{H}, h \heartsuit f$ » c'est la même femme qui est aimée de tous les hommes, alors que dans « $\forall h \in \mathcal{H}, \exists f \in \mathcal{F}$ tq $h \heartsuit f$ » il peut y avoir une femme différente pour chaque homme. La première est « plus forte » que la seconde : si la première est vraie, alors la seconde l'est aussi.

3. $\exists f \in \mathcal{F}$ tq $\forall h \in \mathcal{H}, f \heartsuit h$.

   « Certaines femmes aiment tous les hommes. »

4. $\forall h \in \mathcal{H}, \exists f \in \mathcal{F}$ tq $(h \heartsuit f$ et $f \heartsuit h)$.

   « Pour chaque homme, il y a une femme qu'il aime et dont il est aimé. »

5. $\forall h \in \mathcal{H}, \exists f \in \mathcal{F}$ tq $(h \heartsuit f$ et $f \not\heartsuit h)$.

   « Pour chaque homme, il y a une femme qu'il aime mais dont il n'est pas aimé. »

6. $\forall h \in \mathcal{H}, (\exists f \in \mathcal{F}$ tq $h \heartsuit f$ et $\exists f \in \mathcal{F}$ tq $f \heartsuit h)$.

   « Pour chaque homme il y a une femme qui l'aime et une femme qu'il aime. »

   N.B. Comparez bien à 4 : ici la différence est que la femme que h aime n'est pas forcément celle qui l'aime ! En effet, la variable f a été redéfinie par un second « $\exists$ », rien n'impose à ce que le deuxième f soit le même que le premier. La vision de 4 était bien plus optimiste (mais source de moins d'inspiration pour romanciers et cinéastes).

   Cet exemple vous montre l'importance des parenthèses et de la position ou de la répétition des quantificateurs.

Négations

On introduit à présent deux femmes, Brenda et Jenny, et deux hommes, Mike et Dick. On désignera chacun de ces quatre personnages par son initiale.

Écrire la négation de chacune des phrases suivantes, puis écrire la phrase et sa négation en quantificateurs.

Indication : Dans cet exercice, écrire la phrase en quantificateurs vous aidera à écrire la négation. En effet, écrire la négation d'une phrase en quantificateurs est un procédé purement mécanique et facile à retenir (remplacer les $\forall$ par des $\exists$, etc.)

1. Brenda aime Mike et Dick.

   « Brenda n'aime pas Mike ou n'aime pas Dick ».

   En formule : « $B \heartsuit M$ et $B \heartsuit D$ ».

   Négation : « $B \not\heartsuit M$ ou $B \not\heartsuit D$ ».

2. Tous les hommes aiment Jenny ou Brenda.

   « Certains hommes n'aiment ni Jenny ni Brenda ».

   En formule :« $\forall h \in \mathcal{H}, (h \heartsuit J \text{ ou } h \heartsuit B)$ ».

   Négation : « $\exists h \in \mathcal{H}$ tq $(h \not\heartsuit J$ et $h \not\heartsuit B)$ ».

3. Jenny n'aime aucun homme.

   « Jenny aime (au moins) un homme ».

   En formule : « $\forall h \in \mathcal{H}, J \not\heartsuit h$ ».

   Négation : « $\exists h \in \mathcal{H}$ tq $J \heartsuit h$ ».

4. Brenda aime une femme.

   « Brenda n'aime aucune femme ».

   En formule :« $\exists f \in \mathcal{F}$ tq $B \heartsuit f$ ».

   Négation : « $\forall f \in \mathcal{F}, B \not\heartsuit f$ ».

5. Certains hommes aiment Brenda et Jenny.

   « Aucun homme n'aime Brenda et Jenny. »

   Attention : le « aucun » ne peut être traduit directement en quantificateurs !

   La phrase en quantificateurs s'écrit « $\exists h \in \mathcal{H}$ tq $(h \heartsuit B$ et $h \heartsuit J)$ ».

   Et donc sa négation est : « $\forall h \in \mathcal{H}, (h \not\heartsuit J \text{ ou } h \not\heartsuit B)$ ».

   Si nous revenons directement au français, cela s'écrirait : « tout homme n'aime pas Brenda ou pas Jenny », ce qui est moins clair que la première réponse ci-dessus...

6. Certains hommes aiment Brenda, certains aiment Jenny.

   En français, lorsque deux assertions sont écrites côte à côte, séparées par une virgule comme ici, cela signifie que les deux sont vraies[2]. Autrement dit, il faut comprendre un « et » entre les deux. Dans la négation, il y aura donc un « ou ».

   « Personne n'aime Brenda ou personne n'aime Jenny ».

   En formule : « $(\exists h \in \mathcal{H}$ tq $h \heartsuit J)$ et $(\exists h \in \mathcal{H}$ tq $h \heartsuit B)$ ».

   Négation : « $(\forall h \in \mathcal{H}, h \not\heartsuit J) \text{ ou } (\forall h \in \mathcal{H}, h \not\heartsuit J)$ ».

   N.B. En comparant à l'exemple précédent, on constate que la répétition du « $\exists h \in \mathcal{H}$ » change le sens de la phrase. Lorsqu'il est répété, l'amant de Jenny n'est pas forcément le même que celui de Brenda. Au contraire lorsqu'il n'y a qu'un seul « $\exists$ », c'est le même homme qui aime les deux femmes. Même principe qu'à la question 1.6.

   En termes savants, vous pouvez dire que « $\exists$ » n'est pas distributif par rapport à « et ». En effet, si E est un ensemble et P et Q deux prédicats sur E, alors $\exists x \in E$ tq $(P(x)$ et $Q(x))$ n'est pas équivalent à $(\exists x$ tq $P(x))$ et $(\exists x \in E$ tq $Q(x))$.

   Remarque : La phrase de départ pouvait aussi s'écrire $\exists (h, h')$ tq $h \heartsuit J$ et $h \heartsuit B$, ce qui mènerait à écrire sa négation ainsi : $\forall (h, h') \in \mathcal{H}^2, h \not\heartsuit J \text{ ou } h' \not\heartsuit B$.

   Effectivement, cette dernière phrase a le même sens que $(\forall h \in \mathcal{H}, h \not\heartsuit J) \text{ ou } (\forall h \in \mathcal{H}, h \not\heartsuit J)$, mais ce n'est pas évident de s'en rendre compte...

2. Enfin, à strictement parler c'est une faute grammaticale...

Implications

1. Traduire en formules mathématiques les assertions suivantes :
   (a) Jenny aime tous les hommes qu'aime Brenda.
   $\forall h \in \mathcal{H}, B \heartsuit h \Rightarrow J \heartsuit h$
   (b) Dick n'aime pas les hommes qui aiment à la fois Brenda et Jenny.
   $\forall h \in \mathcal{H}, (h \heartsuit B \text{ et } h \heartsuit J) \Rightarrow D \not\heartsuit h$
   (c) (***) Mike est le seul homme aimé à la fois de Brenda et de Jenny.
   Cette phrase sous-entend deux informations : d'une part Mike est aimé de Brenda et Jenny, ce qui s'écrit $B \heartsuit M$ et $J \heartsuit M$. Et d'autre part, il n'y a pas d'autre homme dans cette situation, ce qui revient à dire que si un homme est aimé à la fois de Brenda et de Jenny, alors cet homme est Mike, donc en formule : $\forall h \in \mathcal{H}, (B \heartsuit h \text{ et } J \heartsuit h) \Rightarrow h = M)$.
   Au total, la phrase cherchée est :
   $$(B \heartsuit M \text{ et } J \heartsuit M) \quad \text{et} \quad \big(\forall h \in \mathcal{H}, (B \heartsuit h \text{ et } J \heartsuit h) \Rightarrow h = M)\big)\,.$$

   (d) (***) Un homme qui n'aime ni Brenda ni Jenny est homosexuel.
   Vous êtes libre du sens précis que vous donnerez au mot « homosexuel », mais vous l'expliquerez dans votre réponse.
   Ne pas oublier les parenthèses car cette phrase est longue !
   Pour commencer, étant donné $h \in \mathcal{H}$, on peut exprimer le fait que h est homosexuel ainsi : « $\exists h' \in \mathcal{H}$ tq $h \heartsuit h'$ », ce qui signifie que h est amoureux d'au moins un homme. Cependant les puristes préciseront : « $\exists h' \in \mathcal{H}$ tq $h \heartsuit h'$ et $\forall f \in \mathcal{F}, h \not\heartsuit f$ » pour préciser que h n'est pas bisexuel (il n'aime aucune femme). Dès lors, la phrase cherchée peut s'écrire :
   $$\forall h \in \mathcal{H}, (h \not\heartsuit B \text{ et } h \not\heartsuit J) \Rightarrow (\exists h' \in \mathcal{H} \text{ tq } h \heartsuit h'),$$
   ou pour les puristes :
   $$\forall h \in \mathcal{H}, (h \not\heartsuit B \text{ et } h \not\heartsuit J) \Rightarrow (\exists h' \in \mathcal{H} \text{ tq } h \heartsuit h' \text{ et } \forall f \in \mathcal{F}, h \not\heartsuit f).$$

2. Que signifient les assertions suivantes ?
   (a) $\forall f \in \mathcal{F}, f \heartsuit M \Rightarrow M \heartsuit f$.
   « Mike aime toutes les femmes qui l'aiment ».
   (b) $(\forall f \in \mathcal{F}, f \heartsuit M) \Rightarrow (\forall f \in \mathcal{F}, M \heartsuit f)$.
   « Si toutes les femmes aimaient Mike, alors Mike aimerait toutes les femmes. »
   En comparant à la phrase précédente, vous avez encore un exemple de l'importance des parenthèses et de la répétition des quantificateurs. On peut dire que « $\forall$ » n'est pas distributif par rapport à « $\Rightarrow$ ».
   Commentaire : Une implication sans le quantificateur universel « $\forall$ » devant est une assertion à peu près jamais utilisée en mathématiques à notre niveau. Par exemple, si A et B sont deux assertions, l'implication « $A \Rightarrow B$ » signifie que

si A est vraie, B aussi. Cela n'a guère d'intérêt : soit A est vraie, et dans ce cas autant retenir immédiatement que B l'est aussi, soit A est faux auquel cas cette implication ne sert à rien.

En revanche, si A et B sont deux *prédicats* sur un ensemble E (donc parfois vrais, parfois faux), l'implication « $\forall x \in E, (A(x) \Rightarrow B(x))$ » est nettement plus utile : elle signifie qu'à chaque fois que $A(x)$ est vrai, $B(x)$ l'est aussi. C'est en fait l'archétype du théorème : $A(x)$ s'appelle l'« hypothèse » du théorème, et $B(x)$ sa « conclusion ».

(c) $\forall h \in \mathcal{H}, h \heartsuit B \Rightarrow J \not\heartsuit h$.

Jenny n'aime pas les hommes qui aiment Brenda.

(d) $\forall h \in \mathcal{H}, J \heartsuit h \Rightarrow h = M$

« Si Jenny aime un homme, cet homme est Mike. » En d'autres termes : « Mike est le seul homme pouvant être aimé de Jenny. »

N.B. Cette phrase ne précise pas si Mike est effectivement aimé de Jenny : peut-être celle-ci n'aime-t-elle personne, ou n'aime-t-elle que des femmes.

(e) $\forall h \in \mathcal{H}, (\forall f \in \mathcal{F}, h \heartsuit f) \Rightarrow h \heartsuit J$.

Les hommes qui aiment toutes les femmes aiment aussi Jenny.

Remarque : Cette phrase est évidemment vraie puisque Jenny est une femme. On dit qu'il s'agit d'une « tautologie ».

(f) $\forall h \in \mathcal{H}, (\exists f \in \mathcal{F} \text{ tq } h \heartsuit f) \Rightarrow h \heartsuit J$.

Tout homme qui aime au moins une femme aime Jenny.

Négation d'implication

La négation d'implication est celle qui pose le plus de problèmes à la plupart des étudiants. Vous êtes prévenus !

Écrire la négation des assertions de la partie .

Pour nier une implication, on dit que la conclusion n'est pas vérifiée alors que l'hypothèse l'est.

1. (a) « Il existe un homme que Brenda aime mais pas Jenny ».
   (b) « Dick aime un homme qui aime Brenda et Jenny ».
   (c) « Certains hommes autres que Mike sont aimés de Brenda et Jenny , ou Mike n'est pas aimé de Brenda, ou Mike n'est pas aimé de Jenny. »
   (d) « Certains hommes n'aiment ni Brenda ni Jenny mais ne sont pas homosexuels ».
2. (a) $\exists f \in \mathcal{F}$ tq $f \heartsuit M$ et $M \not\heartsuit f$. (« Il existe une femme qui aime Mike mais que Mike n'aime pas ».)
   (b) $(\forall f \in \mathcal{F}, f \heartsuit M)$ et $(\exists f \in \mathcal{F}$ tq $M \not\heartsuit f)$ (« Toutes les femmes aiment Mike, et pourtant il en existe une que Mike n'aime pas ».)

   On a déjà dit qu'une implication sans « $\forall$ » devant est une assertion un peu bizarre et rarement utile, donc ne vous inquiétez pas si cet exemple vous semble étrange.

(c) $\exists h \in \mathcal{H}$ tq $h \heartsuit B$ et $J \heartsuit h$ (« Il existe un homme qui aime Brenda et que Jenny aime ». Ou plus littéraire : « Jenny aime un homme qui aime Brenda. »)

(d) $\exists h \in \mathcal{H}$ tq $J \heartsuit h$ et $h \neq M$. (« Jenny aime un autre homme que Mike ».)

(e) $\exists h \in \mathcal{H}$ tq $(\forall f \in \mathcal{F} h \heartsuit f)$ et $h \not\heartsuit J$. (« Il existe un homme qui aime toutes les femmes mais qui n'aime pas Jenny ».)

Remarque : Cette phrase est évidemment fausse ! D'ailleurs c'est la négation d'une phrase toujours vraie.

Rappelons que la négation de « $\forall x,\quad A(x) \quad\Rightarrow\quad B(x)$ » est « $\exists x$ tq $A(x)$ et non $\big(B(x)\big)$ ». L'hypothèse de l'implication n'est pas modifiée. Ici, le bloc « $(\forall f \in \mathcal{F}, h \heartsuit f)$ » reste donc intact quand on passe à la négation.

(f) $\exists h \in \mathcal{H}$ tq $(\exists f \in \mathcal{F}$ tq $h \heartsuit f)$ et $h \not\heartsuit J$ (« Il existe un homme qui aime au moins une femme mais pas Jenny ».)