Le théorème du dictateur

it has been said that democracy is the worst form of Government except for all those other forms that have been tried from time to time.
W. Churchill

Table des matières

1 Intro

On n'étudiera ici seulement pour simplifier que des situations où l'on cherche à élire une et une seule personne parmi un nombre quelconque de candidats. Différentes règles sont employées selon les pays et selon les élections (municipales, présidentielles, législatives, ...). J'ignore pourquoi et comment cette variété s'est mise en place, mais nous pouvons être certains d'un premier fait : dans deux situations exactement similaires en terme de nombres d'électeurs, de candidats, d'opinions, etc. le gagnant ne sera pas le même selon le type d'élection. Par exemple le fait d'autoriser un second tour avec trois candidats pourra diviser les voix entre deux candidats proches, laissant gagner le troisième même s'il n'est soutenu que par une minorité de l'électorat.

Ainsi le choix d'un vainqueur n'a-t-il rien d'universel, d'où les problèmes récurrents de légitimité de celui-ci.

Sous le regard de la plupart des journalistes, une élection est un jeu dont il faut user avec habileté des règles, et non l'expression de la volonté d'un peuple. Et il est certes beaucoup plus simple d'analyser les stratégies des uns et des autres que les règles mêmes.

Pourtant les travaux ne manquent pas sur l'analyse des règles de choix social. Le but de ce petit article est de présenter un théorème très marquant dû à l'économiste Kenneth Arrow dans les années 50, qui montre quelques travers des systèmes traditionnels et indique comment les régler.

2 Exemples

Pour commencer, voici quelques défauts du scrutin utilisé par exemple pour les élections présidentielles, à savoir le scrutin uninominal à deux tours.

2.1 Notre nation-exemple

Étudions une situation où cinq candidats se présentent, que j'appellerai a, b, c, d, et e. Nous supposerons qu'il y a 22 électeurs, et nous connaissons l'ordre de préférence de chaque électeur sur les candidats :

- Pour 4 électeurs : $a > b > c > d > e$;
- Pour 5 électeurs : $c > b > a > d > e$;
- Pour 6 électeurs : $d > b > a > c > e$;
- Pour 7 électeurs : $e > b > a > c > d$.

2.2 Résultat du scrutin uninominal à un tour

Commençons rapidement par voir le résultat d'un scrutin uninominal à un tour, ce qui permettra notamment de comprendre l'utilité d'introduire un second tour.

Supposons que chaque électeur vote pour son candidat préféré. Il y a donc 4 voix pour a, 5 pour c, 6 pour d et 7 pour e, c'est donc ce dernier qui est élu.

Mais si nous regardons plus attentivement, nous constatons que e est placé dernier par 15 électeurs. Il est donc rejeté par environ 68 % de la population.

Par ailleurs, le candidat b est placé deuxième, donc globalement apprécié par toute la population, et a reçu... 0 voix !

On voit que dans cette situation, le système uninominal à un tour favorise les candidats extrêmes, ou clivants, au détriment des candidats consensuels.

2.3 Résultat du scrutin uninominal à deux tours

Reprenons la situation précédente, mais employons à présent un scrutin uninominal à deux tours. Les candidats e et d vont au second tour. Regardons alors comment les électeurs classent ces deux candidats :

- Pour 4 électeurs : $d > e$;
- pour 5 électeurs : $d > e$;
- pour 6 électeurs : $d > e$;
- pour 7 électeurs : $e > d$.

On voit que d sera élu avec 15 voix contre 7. Le second tour a empêché que le pire candidat ne soit élu. Toutefois, d est classé avant-dernier par 9 électeurs (41 %) et dernier par 7 électeurs (32 %). En fait, seuls 6 électeurs (27 %) le placent dans la première moitié de leur classement. Je vous invite à vérifier également que d aurait perdu un second tour contre n'importe qui d'autre que e.

Nous sommes donc en droit d'estimer que le système à deux tours a permis d'éliminer le pire candidat, mais a mené à l'élection du deuxième pire.

Remarque : Poursuivant le raisonnement, on pourrait imaginer un système où il y aurait autant de tours que de candidats (moins un), et où à chaque tour on éliminerait le candidat ayant eu le moins voix. Ce système a été étudié. On pourrait aussi pourquoi pas demander à chaque tour aux électeurs de voter pour le candidat à éliminer (méthode type « Koh-Lanta »). Ce système aussi a été étudié.

En fait, la liste des systèmes de votes étudiés par les mathématiciens est pléthorique et sort du cadre de cet article. Le théorème d'Arrow comme nous le verrons règle leur compte de manière radicale à la plupart d'entre eux.

2.4 Le scrutin uninominal à deux tours est « manipulable »

À présent supposons que les quatre premiers électeurs, conscients que leur candidat préféré (a) n'a aucune chance, de même que leur deuxième candidat préféré (b) décident de voter pour leur troisième candidat, c. La situation équivaut alors à :

- Pour 4 électeurs : $c > a > b > d > e$;
- pour 5 électeurs : $c > b > a > d > e$;
- pour 6 électeurs : $d > b > a > c > e$;

- pour 7 électeurs : $e > b > a > c > d$.

Au second tour vont alors c et e, et c est élu.

Ainsi, les quatre électeurs ont eu raison de ne pas voter pour leur candidat préféré car ceci a mené à l'élection de c à la place de d, et ils préfèrent effectivement c à d.

Dans le vocabulaire mathématique, on dit que le scrutin uninominal à deux tours est « manipulable ». Dans le vocabulaire journalistique, on dit qu'il incite au « vote utile ».

2.5 Digression : à quelle question répond l'électeur ?

Lors d'un référendum, une question précise est posée (ce qui amène un autre gros problème : celui de la formulation) à laquelle l'électeur répond à l'aide de son bulletin. Lors d'une élection au contraire, aucune question claire n'est formulée. Voici deux suggestions :

- Parmi les candidats suivants, lequel vous paraît le plus apte à occuper le poste de ... ?
- Compte tenu des règles du scrutin et des différents sondages auxquels vous avez eu accès, quel bulletin voulez-vous mettre dans l'urne afin de favoriser l'élection d'une personne dont les opinions soient dans la mesure du possible relativement proches de celles de votre candidat préféré ?

Si on considère que la question posée lors d'une élection est la première, il faut convenir qu'en général une grosse partie des électeurs ment, avec l'entière approbation de la société, et que le système électoral les pousse à agir ainsi.

2.6 Le scrutin uninominal à deux tours favorise l'abstention

Supposons que, conscient du fait que leur candidat préféré n'a aucune chance, trois électeurs de e préfèrent aller à la piscine les jours des élections. La situation devient :

- Pour 4 électeurs : $c > a > b > d > e$;
- pour 5 électeurs : $c > b > a > d > e$;
- pour 6 électeurs : $d > b > a > c > e$;
- pour 4 électeurs : $e > b > a > c > d$;

Au second tour vont c et d, puis c est élu.

Ainsi, l'abstention de ces trois électeurs a eu pour effet que c a été élu plutôt que d. Or ces trois électeurs préfèrent c à d. Conclusion : ils ont eu raison de s'abstenir.

2.7 Sensibilité aux alternatives non pertinentes

Un nouveau candidat, f, se présente. Il a en tout et pour tout deux partisans dans la population (pris sur ceux de d) et tous les autres électeurs le classent en dernier. La nouvelle situation est :

- Pour 4 électeurs : $c > a > b > d > e > f$;
- pour 5 électeurs : $c > b > a > d > e > f$;
- pour 4 électeurs : $d > b > a > c > e > f$;
- pour 7 électeurs : $e > b > a > c > d > f$;
- pour 2 électeurs : $f > c > b > a > d > e$.

À présent, c et e vont au second tour, et c gagne.

Ainsi l'apparition d'un nouveau candidat complètement minoritaire change le résultat de l'élection.

2.8 Le scrutin uninominal à deux tours est « non monotone »

Le candidat d propose d'abolir enfin les privilèges d'une certaine catégorie de fonctionnaires. Il convainc trois électeurs (parmi les partisans de e) de voter pour lui, et la situation devient :

- Pour 4 électeurs : $c > a > b > d > e$;
- pour 5 électeurs : $c > b > a > d > e$;
- pour 6 électeurs : $d > b > a > c > e$;
- pour 3 électeurs : $e > b > a > c > d$;
- pour 4 électeurs : $d > e > b > a > c$.

Nous constatons alors qu'au second tour vont d et c. Mais alors c est élu.

Ainsi, la campagne *réussie* de d lui a fait perdre l'élection.

Commentaires : Voici la définition précise d'un système électoral « monotone » : il s'agit d'un système électoral tel que pour tous candidats x et y, si entre deux élections l'ensemble des électeurs qui préfèrent x à y a augmenté [1], alors au classement final, x ne peut pas passer de devant y à derrière.

L'exemple précédent montre que le scrutin uninominal à deux tours n'est pas monotone.

Dans la pratique, un politicien doit certes convaincre des électeurs de voter pour lui, mais doit en outre convaincre les bons électeurs, pour tomber face au bon adversaire au second tour.

Dans le fond, tous les problèmes énumérés ci-dessus (vote utile, encouragement de l'abstention, sensibilité aux alternatives non pertinentes) sont des variantes du même, et ils seraient largement amoindris dans un système électoral monotone. On peut donc considérer la monotonie comme une condition clef : trouver le moyen de la satisfaire réglerait un certain nombre des défauts du système actuel.

2.9 Commentaires subjectifs

Ce paragraphe constitue un avis personnel, que le lecteur est invité à ignorer ou contredire.

Les nombreux travers de notre système électoral ont, comme dit en introduction, pour conséquence le fait que la politique semble devenir un jeu qui occupe l'espace public plus que la confrontation des idées elles-mêmes.

En outre le fait qu'une grosse part d'arbitraire intervienne dans les élections contribue au sentiment de dissociation entre les électeurs et les élus, d'où les questionnements récurrents sur la légitimité de ces derniers, et l'abstention galopante.

Si l'on souhaite réconcilier les citoyens avec la vie publique, il me semble primordial de réfléchir aux modes de scrutin.

3 La théorie

3.1 Le paradoxe du Condorcet

Le marquis de Condorcet s'est interrogé sur les systèmes électoraux à la veille de la Révolution française. Il a mis le doigt sur la situation suivante, bien connue des sportifs lors des « poules » : imaginons qu'il y ait trois candidats a, b et c et que

- pour un tiers des électeurs, $a > b > c$;
- pour un tiers des électeurs, $b > c > a$;
- et pour le tiers restant, $c > a > b$.

Avec ces informations, les trois candidats sont parfaitement interchangeables et il est impossible de déterminer un vainqueur.

Cette situation à l'échelle d'un pays à une probabilité quasi-nulle de se produire. Toutefois si on étudie la démonstration du théorème d'Arrow, on constate qu'elle est en quelque sorte la source des problèmes cités à la partie précédente.

Remarque : On voit déjà apparaître un principe qui reviendra plus tard : pour désigner un vainqueur dans cette situation, il nous faudrait plus d'information. Il faudrait savoir par exemple à quel point les électeurs préférant a le préfèrent, à quel point ceux qui ne l'aiment pas ne l'aiment pas etc.

3.2 Le théorème d'Arrow

Le théorème d'Arrow a été publié en 1951. Son énoncé est particulièrement frappant.

Théorème 3.1. *Soit C un système électoral vérifiant les deux conditions suivantes :*

- *monotonie (voir la partie 2.8) ;*
- *« unanimité » : si tous les électeurs préfèrent un candidat a à un candidat b, alors au classement final, a sera avant b.*

1. Pour les matheux : quand je dis « augmenté », la relation d'ordre utilisée est l'inclusion. Ce n'est pas seulement le *nombre* d'électeurs préférant x qui augmente.

Alors C est une dictature, ce qui signifie qu'il existe un électeur j tel que le résultat d'une élection est toujours le résultat décidé par j.

Tous les systèmes électoraux courants vérifient la condition d'unanimité, mais pas celle de monotonie.

3.3 Présupposés, conséquences

Je n'ai pas exprimé le théorème d'Arrow en langage mathématique, ce qui fait que l'énoncé est flou, et que j'ai pu cacher sous le tapis une hypothèse, dans le but d'un effet de style bon marché.

L'hypothèse en question est que le système électoral ne prend en compte que *l'ordre* dans lequel chaque électeur classe les candidats. Ainsi, le théorème d'Arrow ne s'applique plus dès que l'on demande aux électeurs non pas de classer mais de noter les candidats.

Au passage, le fait de demander son avis sur *tous* les candidats à l'électeur lui donnera l'impression d'être écouté, a contrario du système actuel où justement il sait qu'il a en général intérêt à ne *pas* voter pour son candidat préféré, situation particulièrement frustrante.

Je dois encore signaler que dans un classement par note, l'électeur doit a priori utiliser la note maximale et la note minimale, sans quoi il fait perdre du poids à son bulletin. Le bulletin extrême où tous les candidats ont la même note revient à un bulletin blanc.

Je vais me permettre encore un commentaire personnel : il est incroyable qu'alors qu'il existe une solution aussi simple aux innombrables défauts de notre système électoral, celle-ci soit aussi peu connue et débattue. La tradition reste la plus grande puissance de la vie politique.

Enfin, remarquons qu'à l'époque de la Révolution française, il n'était pas envisageable techniquement de traiter des bulletins de vote complexes où figurent une note par candidat. Les moyens informatiques actuels le permettent sans difficulté, mais le problème du contrôle se pose alors.

3.4 Retour aux exemples précédents

Le théorème d'Arrow prouve essentiellement que pour obtenir un système satisfaisant, il faut demander aux électeurs de noter les candidats et non pas seulement de les classer (ou pire encore d'indiquer uniquement leur préféré !).

Mais la manière de déduire ensuite le vainqueur est sujette à débat. Une solution évidente est de calculer la moyenne de chaque candidat. Mais certains préfèrent utiliser la médiane, qui est un indicateur moins sensible aux extrêmes (même si nous avons vu que l'utilisation de la moyenne est déjà beaucoup moins sensible aux extrêmes que le scrutin uninominal à deux tours).

Quelques recherches sur internet avec pour mots clef « votes alternatifs » le mèneront à diverses expérimentations et à de nombreuses propositions, dont beaucoup sont des variantes des votes par médiane ou par moyenne.

Par exemple le vote dit « par jugement majoritaire » est un vote par calcul de médiane. Les votes dits « de valeurs », « par approbation » ou « par notes » sont des variantes du calcul de moyenne.

Reprenons les exemples de la partie **??** avec un vote par calcul de moyenne de notes. Pour simplifier, mettons que les notes soient à choisir entre $+2$ et -2, et qu'un électeur qui classait les candidats dans un ordre $x > y > z > t > u$ mettra la note 2 à x, 1 à y, 0 à z, -1 t et -2 à u. Dans la réalité, les électeurs disposent de beaucoup plus d'expressivité et les bulletins de votes seraient beaucoup plus variés.

Rappelons la situation en terme de classement :

- Pour 4 électeurs : $a > b > c > d > e$;
- Pour 5 électeurs : $c > b > a > d > e$;
- Pour 6 électeurs : $d > b > a > c > e$;
- Pour 7 électeurs : $e > b > a > c > d$.

Elle devient en terme de notes :

- Pour 4 électeurs : $a : 2$, $b : 1$, $c : 0$, $d : -1$, $e : -2$;
- Pour 5 électeurs : $c : 2$, $b : 1$, $a : 0$, $d : -1$, $e : -2$;
- Pour 6 électeurs : $d : 2$, $b : 1$, $a : 0$, $c : -1$, $e : -2$;
- Pour 7 électeurs : $e : 2$, $b : 1$, $a : 0$, $c : -1$, $d : -2$.

Je vais faire la somme des notes obtenues par chaque candidat (pour la moyenne, il suffit de diviser par le nombre d'électeurs, mais cela n'a aucune incidence sur le classement final, donc autant rester avec de braves nombres entiers).

- Candidat a : $4 \times 2 + 5 \times 0 + 6 \times 0 + 7 \times 0$, ce qui fait 8 ;
- Candidat b : 22 ;
- Candidat c : $4 \times 0 + 5 \times 2 + 6 \times (-1) + 7 \times (-1)$, qui vaut -3 ;
- Candidat d : $4 \times (-1) + 5 \times (-1) + 6 \times 2 + 7 \times (-2)$, soit -11 ;
- Candidat e : $16 \times (-2) + 7 \times 2$ soit -18.

Selon ce système, c'est donc b qui est élu. Et on retrouve l'intuition formée à la partie **??** selon laquelle e est le pire, et d le deuxième pire des candidats.

Voyons maintenant ce que deviennent les différentes variations étudiées précédemment.

3.4.1 Abstention

Nous avions étudié le cas où trois électeurs de e vont à la piscine. La situation devient en terme de notes :

- Pour 4 électeurs : $a : 2$, $b : 1$, $c : 0$, $d : -1$, $e : -2$;
- Pour 5 électeurs : $c : 2$, $b : 1$, $a : 0$, $d : -1$, $e : -2$;
- Pour 6 électeurs : $d : 2$, $b : 1$, $a : 0$, $c : -1$, $e : -2$;
- Pour 4 électeurs : $e : 2$, $b : 1$, $a : 0$, $c : -1$, $d : -2$.

Et la somme des notes :

- Candidat a : $4 \times 2 + 5 \times 0 + 6 \times 0 + 4 \times 0$, ce qui fait 8 ;
- Candidat b : 18 ;
- Candidat c : $4 \times 0 + 5 \times 2 + 6 \times (-1) + 4 \times (-1)$, qui vaut 0 ;
- Candidat d : $4 \times (-1) + 5 \times (-1) + 6 \times 2 + 4 \times (-2)$, soit -5 ;
- Candidat e : $16 \times (-2) + 4 \times 2$ soit -24.

Le classement final n'est pas changé. Au niveau des notes, e a baissé, ce qui est logique puisque ce sont ses partisans qui se sont abstenus. Ainsi notre mode de scrutin ne favorise aucunement l'abstention.

3.4.2 Monotonie

Si un candidat réussit sa campagne électorale, il augmente sa note auprès de certains électeurs. Cela augmente sa moyenne finale et ne peut pas le faire baisser dans le classement final. Il est clair qu'un système de vote par note est monotone [2].

3.4.3 Manipulabilité et médiane

Avec un scrutin uninominal à deux tours, nous avons vu que les quatre premiers électeurs avaient intérêt à mentir sur leur candidat préféré en votant pour c au lieu de a. Ici c'est déjà b, qui leur convient mieux que c qui est élu, ils n'ont donc aucune raison d'essayer de favoriser ce dernier.

Ils pourraient toutefois mentir sur leurs préférences pour essayer de faire gagner a. Pour ce, ils pourraient mettre la note de -2 à b même si ce candidat leur plaît. Cela fera perdre 12 point à b, qui arrive à 6 et passe derrière a. Ainsi le scrutin par calcul de moyenne est toujours manipulable...

On peut néanmoins se poser la question de la psychologie : est-ce qu'un électeur de la première catégorie ci-dessus ($a > b > c > d > e$) irait vraiment mettre une mauvaise note à son deuxième candidat préféré (b) parce que les sondages lui font penser qu'en le faisant perdre il ferait gagner a, au risque de faire finalement gagner c (ce qui se produirait si les électeurs de la deuxième catégorie raisonnaient comme lui...) qui lui convient moins ?

Quoi qu'il en soit c'est pour régler ce problème que le scrutin par calcul de médiane est proposé. Je ne vais pas détailler ici, voyons juste ce que donne un calcul de médiane sur notre exemple :

- La note médiane de a est 0 ;
- la note médiane de b est 1 ;
- la note médiane de c est -1 ;
- la note médiane de d est -1 ;
- la note médiane de e est -2.

2. Disons l'analogue de monotone puisque la définition était donnée dans le cadre de relations d'ordre.

Le classement est toujours le même, mais c et d sont ex-aequo. Il est toutefois facile d'imaginer des moyens de les départager, à commencer par utiliser la moyenne.

Que se passe-t-il si les électeurs de la première catégorie mettent -2 à b ? Celui-ci est toujours noté à 1 par 18 électeurs, mais il est noté à -2 par 4 électeurs. Cela ne change pas sa médiane, qui reste à 1 !

Ainsi, les électeurs de la première catégorie n'ont plus intérêt à mentir.

4 Démonstration du théorème d'Arrow

La preuve du théorème d'Arrow ne nécessite aucune connaissance mathématique autres que les concepts d'ensembles et d'ordre, mais une bonne habitude de la déduction. J'utiliserai tout de même quelques quantificateurs et implications. Je mettrai les point techniques utilisant du vocabulaire mathématique en notes de bas de page afin que le lecteur intéressé puisse avoir une démonstration complète, sans gêner la lecture de celui qui souhaite juste en comprendre le principe.

4.1 Hypothèses et vocabulaire

L'ensemble des électeurs sera noté $\mathcal{E}$, celui des candidats $\mathcal{C}$.

Lors d'une élection, chaque électeur x décide d'un ordre, que je noterai $\geq_x$, sur l'ensemble des candidats. Ainsi si a et b sont des candidats, $a \geq_x b$ signifie que l'électeur x préfère a à b.

Une « constitution » permet de définir pour tout ensemble de candidats et tout ensemble d'ordre de préférence des électeurs un ordre [3] sur les candidats que nous appelons résultat de l'élection.

Remarque : Dans une élection classique il y a souvent un seul candidat élu : considérer que c'est le premier et que tous les autres sont deuxième ex-aequo.

Ainsi une constitution est une fonction dont les entrées sont les ordres de préférences de tous les électeurs, et la sortie est un ordre [4] sur $\mathcal{C}$.

Dans la suite quand je dirai « lors d'une élection », cela signifiera « étant donné un ordre sur $\mathcal{C}$ pour chaque électeur » [5].

S'il est besoin de préciser, on notera $\geqslant_{x,e}$ l'ordre dans lequel x classe les candidats lors de l'élection e, et $\geqslant_{e,C}$ le résultat de l'élection e en suivant les règles de la constitution C.

Dans la suite, nous fixons une constitution C que nous supposons vérifier les deux conditions d'unanimité et de monotonie dont on a parlé plus haut. Pour pouvoir faire de vrais raisonnements, commençons par donner les définitions précises de ces deux termes :

- *Unanimité :* si tous les électeurs sont d'accord sur un point, alors le résultat final concorde sur ce point. Précisément, pour tous candidats a et b et toute élection e,

$$\Big(\forall x \in \mathcal{E},\ a \geqslant_{x,e} b\Big) \Rightarrow a \geqslant_{e,C} b$$

- *Monotonie :* Soient e et e' deux élections, et a et b deux candidats. Si l'ensemble des électeurs préférant a à b a augmenté entre e et e', alors le classement final de a par rapport à b ne peut diminuer. En formule :

$$\begin{cases} \Big\{ x \in \mathcal{E} \Big| \ a \geqslant_{x,e} b \Big\} \subset \Big\{ x \in \mathcal{E} \Big| \ a \geqslant_{x,e'} b \Big\} \\ a \geqslant_{e,C} b \end{cases} \Rightarrow a \geqslant_{e',C} b$$

4.2 Oligarchie

Nous appelons « oligarchie » tout ensemble d'électeurs qui si ils sont d'accord peuvent imposer leur choix. En formule, un ensemble O d'électeurs est une oligarchie si pour n'importe quelle élection e, n'importe quels candidats x et y,

3. En vrai pas un ordre car il peut y avoir des ex-aequo. La relation résultant de l'élection sera seulement supposé réflexive et transitive. On dit que c'est un « pré-ordre ».

4. Un pré-ordre en vrai.

5. On pourrait même appeler « élection » la donnée d'un ordre sur $\mathcal{C}$ pour chaque électeur.

$$\big(\forall o \in O,\ x \geqslant_o y\big) \Rightarrow x \geqslant_e y.$$

D'après l'hypothèse d'unanimité, il existe au moins une oligarchie : l'ensemble de tous les électeurs.

Un « dictateur » est une personne qui impose sa volonté en tout circonstance : d est un dictateur lorsque pour toute élection e et tous candidats a et b,

$$a \geqslant_d b \Rightarrow a \geqslant_e b.$$

Ainsi, un dictateur forme une oligarchie à lui tout seul.

Les mathématiciens parmi les lecteurs auront à ce stade deviné la stratégie : fixons dans la suite O une oligarchie contenant un nombre minimal d'électeurs [6]. Nous allons prouver que O contient un seul électeur : ce sera le dictateur.

4.3 Partie technique : ensemble décisif

Soient a et b deux candidats. Un ensemble D d'électeurs est dit « décisif pour a et b » si ils peuvent imposer leurs préférence concernant le classement de a et b. Plus précisément si pour toute élection e, si tous les membres de D préfèrent a à b, alors $a \geqslant_e b$.

En formule, D est décisive pour a et b lorsque pour toute élection e,

$$\big(\forall x \in D,\ a \geqslant_x b\big) \Rightarrow a \geqslant_e b$$

Il s'agit donc d'une version affaiblie de l'oligarchie : une partie décisive pour a et b peut imposer sa volonté seulement sur le classement de a et b et non sur le résultat complet de l'élection.

Lemme 4.1. *Soient a et b deux candidats, et D un ensemble d'électeurs. On suppose qu'il existe une élection e pour laquelle on a :*

- *Pour tout $x \in D$, $a \geqslant_x b$;*
- *pour tout autre électeur x, $a \leqslant_x b$.*

Alors D est décisive pour a et b.

Autrement dit, si dans une élection où tout le monde était contre eux, les membres de D ont pu imposer leur volonté, alors ils pourront le faire dans n'importe quelle élection.

Preuve du lemme : C'est simplement la condition de monotonie : soit e' une autre élection où tous les membres de D préfèrent a à b. Alors l'ensemble des électeurs préférant a à b est plus grand lors de e' que lors de e. En formule :

$$\big\{x \in \mathcal{E} \big|\ a \geqslant_{x,e} b\big\} \subset \big\{x \in \mathcal{E} \big|\ a \geqslant_{x,e'} b\big\}$$

Alors par définition d'un scrutin monotone, le fait que $a \geqslant_{e,C} b$ entraîne $a \geqslant_{e',c} b$. □

Le lemme suivant est assez surprenant et constitue le cœur de la preuve :

Lemme 4.2. *Soient a et b deux candidats et D un ensemble d'électeurs. On suppose que D est décisive pour a et b. Alors D est une oligarchie.*

Autrement dit, si D est décisive pour deux candidats, elle est en fait décisive pour tous les candidats.

Preuve du lemme : Soient c et d deux autres candidats. Prouvons que D est décisive pour c et d.

- **Première étape :** Montrons que D est décisive pour a et c. On considère une élection e où :
  - ◇ Pour tout $x \in D$, $c \geqslant_x a \geqslant_x b$
  - ◇ pour tout autre électeur x, $b \geqslant_x c \geqslant_x a$.

  On constate que tous les électeurs préfèrent c à a, donc par la condition d'unanimité, $c \geqslant_e a$.
  De plus, D étant décisive pour a et b, on déduit que $a \geqslant_e b$.
  Alors le classement final de l'élection est $c \geqslant_e a \geqslant_e b$ [7].

  Mais les membres de D étaient les seuls à préférer c à b. Par le lemme 4.1, cela entraîne que D est décisive pour c, b.
- **Deuxième étape :** Maintenant soit d un autre candidat. Il suffit de faire le même raisonnement avec (b, c, d) au lieu de (a, b, c) pour obtenir que D est décisive pour c et d.

□

6. L'ensemble des nombres d'électeurs des oligarchies est une partie non vide (on a dit que $\mathcal{E}$ est une oligarchie) de $\mathbb{N}$ donc admet un minimum. En outre l'ensemble vide n'est pas une oligarchie sauf si tous les candidats sont toujours classés ex-aequo, hypothèses que nous éliminons dans la suite. Donc $O \neq \emptyset$.

7. par transitivité de $\geqslant_e$, $c \geqslant_e b$

4.4 Étude d'une oligarchie minimale

Revenons à notre oligarchie O de cardinal minimal. Soit $v \in O$ [8]. Considérons une élection e à trois candidats a, b et c où :

- $a \geqslant_v b \geqslant_v c$;
- Pour tout autre membre o de l'oligarchie, $b \geqslant_o c \geqslant_o a$;
- pour tout autre électeur x, $c \geqslant_x a \geqslant_x b$.

Remarque : On reconnaît une situation à la Condorcet.

On constate déjà que tous les membres de l'oligarchie préfèrent b à c, donc $b \geqslant_e c$. Reste à voir comment a sera classé.

Est-il possible que $c \geqslant_e a$? Supposons-le un instant.

> Le classement final serait alors $b \geqslant_e c \geqslant_e a$. En particulier $b \geqslant_e a$ [a].
> Mais les membres de $O \setminus \{v\}$ étaient les seuls à préférer b à a. Nous sommes donc dans le cas d'application du lemme 4.1, et $O \setminus \{v\}$ est décisive pour a et b. Puis par le lemme 4.2, $O \setminus \{v\}$ est une oligarchie.
> Ceci est absurde car O était supposée être une oligarchie minimale.
>
> *a.* Transitivité de $\geqslant_e$

Nous devons donc exclure la possibilité $c \geqslant_e a$. Donc $c <_e a$.

Mais v était le seul électeur à préférer a à c. On ré-emploie alors les lemmes 4.1 et 4.2 et on obtient que $\{v\}$ est une oligarchie.

Ainsi, v est un dictateur, ce qui conclut la démonstration.

8. On a dit plus haut que $O \neq \emptyset$.