# Devoir libre : Le théorème d'Arrow, ou "du dictateur"

Le but de ce problème est d'étudier la théorie dite "du choix social". Nous prenons l'exemple d'une élection : on dispose de plusieurs candidats, et chaque électeur établit son ordre de préférence entre tous les candidats.

La question est bien sûr de déterminer quel candidat élire. En France, le système employé pour une élection présidentielle est le scrutin uninominal (chaque électeur mets un seul nom dans l'urne) à deux tours, sachant qu'au deuxième tour les candidats retenus sont les deux ayant eu le plus de voix. Déjà, pour élire les députés le système n'est plus le même (trois candidats sont possibles au second tour). Aux état-unis, on vote par "grand électeurs" interposés. En Grande-Bretagne, il n'y a qu'un seul tour...

Pendant la guerre froide, le mathématicien Kenneth Arrow fut mandé par le gouvernement des état-unis pour déterminer le système de vote idéal. Sa réponse fut simple, et lui valut le prix Nobel. Curieusement, elle est très peu connue du public. Nous allons maintenant la découvrir.

## 1 Notations

On fixe un ensemble fini $A$, qui représente l'ensemble des candidats. On fixe $n \in \mathbb{N}$, ce sera le nombre d'électeurs.

Soit $P$ une relation d'ordre sur $A$ (on utilise la lettre $P$ pour pour "préférence"). On dit qu'elle est totale lorsque $\forall (a, b) \in A^2$, on a $aPb$ ou $bPa$. On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des relations d'ordre total sur $A$.

*A chaque scrutin, chaque électeur décide son ordre de préférence, qu'on suppose total pour simplifier (il n'y a pas de candidats entre lesquels il hésite). On notera, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P_i \in \mathbb{P}$ l'ordre de préférence du $i°$ individu. Le n-uplet $\mathcal{P} = (P_1, ..., P_n) \in \mathbb{P}^n$ est donc la liste de toutes les préférences de tous les votants.*

*Ainsi pour tout $(a, b) \in A^2$ et $i \in [\![1, n]\!]$, $aP_ib$ signifie que le $i°$ individu préfère le candidat $a$ au candidat $b$.*

*Le but est, étant donnés $\mathcal{P} = (P_1, ..., P_n)$ ces $n$ ordres de préférences, de trouver l'ordre de préférence "moyen" qui satisfait le plus grand nombre. On notera le plus souvent $\geq_{\mathcal{P}}$ l'ordre de préférence obtenu.*

*Pour des raisons techniques, $\geq_{\mathcal{P}}$ ne pourra pas toujours être une véritable relation d'ordre : il est toujours possible qu'il y ait des candidats à égalité. Considérer l'exemple suivant : prenons 3 candidats $a, b$ et $c$, trois électeurs (donc $n = 3$). Supposons que les préférences des trois électeurs soient ainsi :*

- premier électeur : $aP_1bP_1c$
- second lecteur : $bP_2cP_2a$
- troisième électeur : $cP_3aP_3b$

*Chacun des candidats est classé en premier par un électeur, en second par un autre et en troisième par le dernier : il est impossible de les départager. (À moins de donner plus d'importance à un électeur qu'à un autre).*

*Dans la pratique, avec quelques millions d'électeurs, la probabilité d'un tel phénomène est quasi nulle : ceci n'est pas un vrai problème. Toujours est-il que nous ne pouvons pas demander à $\geq_{\mathcal{P}}$ d'être une vraie relation d'ordre.*

On note $\mathbb{O}$ l'ensemble des relations sur $A$ qui sont transitives, réflexives, et totales.

Nous appellerons constitution une fonction $C : \mathbb{P}^n \to \mathbb{O}$.

*Ainsi, la constitution est la fonction qui étant donné $\mathcal{P} \in \mathbb{P}^n$ les ordres de préférences des électeurs calcule l'ordre de préférence moyen $C(\mathcal{P}) \in \mathbb{O}$ qu'on adoptera pour choisir l'élu.*

Fixons pour toute la suite une constitution $C$. Pour tout $\mathcal{P} \in \mathbb{P}^I$, la relation $C(\mathcal{P})$ pourra aussi être notée $\geq_{\mathcal{P}}$. La relation stricte correspondante sera notée $>_{\mathcal{P}}$. (Donc pour tout $(a, b) \in A^2$, $a >_{\mathcal{P}} b$ signifie $a \geq_{\mathcal{P}} b$ et $a \neq b$.)

*Voici quelques propriétés qu'on peut espérer d'une bonne constitution : Pour commencer, si tous les individus préfèrent le candidat a au candidat b, le classement final devrait lui aussi placer le candidat a devant b. Ceci s'exprime précisément ainsi :*

**Définition 1.1**

*Nous dirons que $C$ respecte la condition d'**unanimité** lorsque :*

*Pour tout $\mathcal{P} = (P_1, ..., P_n) \in \mathbb{P}^n$, pour tout $(a, b) \in A^2$ :*

$$(\forall i \in [\![1, n]\!], \quad aP_i b) \quad \Rightarrow \quad a \geq_{\mathcal{P}} b.$$

*Deuxième condition : si entre deux scrutins l'ensemble des individus préférant le candidat a au candidat b a augmenté, alors le classement final de a par rapport à b ne diminue pas ( plus précisément : si a était devant b, il doit le rester).*

**Définition 1.2**

*Nous dirons que $C$ respecte la condition de* ***monotonie*** *lorsque :*
*Pour tous $\mathcal{P} = (P_1, ..., P_n) \in \mathbb{P}^n$ et $\mathcal{P}' = (P'_1, ..., P'_n) \in \mathbb{P}^n$ deux ensembles de préférences des votants, on a :*
*Si*

$$\{i \in [\![1, n]\!] \mid aP_i b\} \quad \subset \quad \{i \in [\![1, n]\!] \mid aP'_i b\}$$

*alors :*

$$a \geq_{\mathcal{P}} b \quad \Rightarrow \quad a \geq_{\mathcal{P}'} b.$$

*(Penser à $(P_1, ..., P_n)$ comme aux préférences des votant lors d'un premier scrutin, et à $(P'_1, ..., P'_n)$ comme aux préférences lors d'un deuxième scrutin.)*

*Enfin voici une troisième condition ( qu'on cherchera plutôt à éviter !) : on dit que C est une dictature si un individu décide tout seul :*

**Définition 1.3**

*Nous dirons que $C$ est une dictature lorsqu'il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que :*
*Pour tout $P \in \mathbb{P}^n$, on a pour tout $(a, b) \in A^2$ :*

$$aP_j b \quad \Rightarrow \quad a \geq_{\mathcal{P}} b$$

*Le dictateur est alors le $j^\circ$ individu : il suffit qu'il préfère le candidat a au candidat b pour que celui-ci passe devant, c'est donc j qui décide seul qui sera élu.*

1) Une dictature vérifie-t-elle les axiomes de monotonie et d'unanimité ?

# 2 Exemple le plus simple : scrutin uninominal à un tour

Pour cette partie, on définit une constitution $C$ ainsi : on demande à chaque votant d'indiquer uniquement son candidat préférée. Ensuite on classe les candidats dans l'ordre du nombre de voix obtenues.

Plus précisément : pour tout $a \in A$, on notera $N_a$ le nombre d'électeurs dont $a$ est le candidat préféré. Donc $N_a$ est le nombre de voix reçu par $a$. En formules : $N_a = \text{Card}\,\{i \in [\![1, n]\!] \mid \forall b \in A, aP_i b\}$.

On définit alors le classement final $\geq_{\mathcal{P}}$ par :

$$\forall (a, b) \in A^2 : \qquad a \geq_{\mathcal{P}} b \quad \Leftrightarrow \quad N_a \geq N_b$$

1. *Exemple :* Considérons 4 candidats $a, b, c, d$ : $A = \{a, b, c, d\}$, et 18 votants : $n = 18$.
   On considère les deux ensembles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'ordres de préférences tel que :

   Pour $\mathcal{P}$ :
   - Les 6 premiers votants ont l'ordre de préférence $aP_i bP_i cP_i d$
   - Les 2 suivants ont l'ordre de préférence $bP_i aP_i cP_i d$

- Les 4 suivants ont l'ordre de préférence $cP_ibP_iaP_id$
- Les 5 derniers ont l'ordre de préférence $dP_ibP_iaP_ic$

Et pour $\mathcal{P}'$ :
- Les 6 premiers votants ont l'ordre de préférence $aP'_ibP'_icP'_id$
- Les 2 suivants ont l'ordre de préférence $aP'_ibP'_icP'_id$
- Les 4 suivants ont l'ordre de préférence $bP'_icP'_iaP'_id$
- Les 5 derniers ont l'ordre de préférence $bP_idP_iaP_ic$

Compter le nombre de voix obtenues pour chaque candidat dans les deux cas, et donner le classement final. Compter également le nombre de votant préférant $a$ à $b$ dans les deux cas.

2. Parmi les trois conditions d'unanimité, de monotonie et de dictature, lesquels sont vérifiées par la constitution $C$ ?
3. Autre exemple : avec trois candidats $a, b, c$ et 15 électeurs :
   - Les 5 premiers ont l'ordre de préférence : $c \geq b \geq a$
   - Les 4 suivants : $b \geq a \geq c$
   - Les 6 derniers : $a \geq b \geq c$

   Calculer le résultat du scrutin. Combien de personnes préfèrent $b$ à $a$ ? Commenter.

# 3 Deuxième exemple : scrutin uninominal à deux tours

Étudions maintenant le mode de scrutin utilisé en France pour les élections présidentielles par exemple. On effectue d'abord un premier tour comme dans la partie précédente. Ensuite, notons $x$ et $y$ les deux candidats ayant eu le plus de voix, on effectue un deuxième tour où chaque votant dit s'il préfère $x$ ou $y$. Celui des deux ayant le plus de voix sera élu, l'autre sera classé deuxième. (Et toutes les candidats ayant été éliminées au premier tour garderont leur classement du premier tour.)

1) Étudier les mêmes exemples et répondre aux mêmes question qu'à la partie précédente.

# 4 Le théorème du dictateur

Nous fixons à présent une constitution $C$ que nous supposons vérifier les conditions de monotonie et d'unanimité.

Nous aurons besoins d'encore un peu de vocabulaire : Nous dirons qu'un ensemble $J$ d'électeurs est un ensemble décisif pour $(a, b)$ lorsque les électeurs de $J$ sont en mesure d'imposer leur préférence entre $a$ et $b$. Précisément :

**Définition 4.1**

*Soit $J \in \mathcal{P}([\![1, n]\!])$ et $(a, b) \in A^2$. On dit que $J$ est une partie décisive pour $(a, b)$ lorsque :*
*Pour tout $P \in \mathbb{P}^n$ :*

$$(\forall i \in J, \quad aP_ib) \quad \Rightarrow \quad a \geq_P b.$$

1. Soit $J \in \mathcal{P}([\![1, n]\!])$ et $(a, b) \in A^2$. Soit $\mathcal{P} \in \mathbb{P}^n$ une liste de préférences tel que :
   - $\forall i \in J, aP_ib$
   - $\forall i \in [\![1, n]\!] \setminus J, bP_ia.$

   (Autrement dit, seuls les électeurs de l'ensemble $J$ préfèrent $a$ à $b$.) On suppose que $a \geq_P b$. Montrer que $J$ est un ensemble décisif pour $(a, b)$.

   *Indication:* Utiliser l'axiome de monotonie.

2. Soit $(a, b) \in A^2$ et $J$ un ensemble d'électeurs décisif pour $(a, b)$.
   a) Soit $x \in A$. Montrer que $J$ est également décisif pour $(x, b)$. On pourra considérer un ensemble de préférence $P$ tel que :

      - $\forall i \in J : \quad xP_iaP_ib$
      - $\forall i \in [\![1, n]\!] \setminus J : \quad bP_ixP_ia$

      et utiliser la question 1. (*Indication:* Ici l'axiome d'unanimité sera utile.)

   b) Sur le même principe montrer que pour tout $y \in A$, $J$ est décisif pour $(a, y)$.
   c) Finalement, montrer que $J$ est décisif pour tout couple $(x, y) \in A^2$.

   *Ainsi une partie décisive pour un certain couple est en fait décisive pour n'importe quel couple. Dans la suite, nous dirons juste "un ensemble d'électeur décisif" (tout court).*

3. Soit $E = \{\text{Card}(J) \mid J \text{ est un ensemble décisif non vide}\}$. Montrer que $E$ admet un minimum. On notera $m$ ce minimum.

   *Nous fixons dans la suite $J$ un ensemble d'électeurs décisif non vide de cardinal $m$. Nous fixons également $j \in J$.*

4. On fixe $(a, b) \in A^2$, $z \in A$ et $P$ un ensemble de préférences tel que :

   - $aP_jzP_jb$
   - $\forall i \in J \setminus \{j\} : bP_iaP_iz$
   - $\forall i \in I \setminus J : zP_ibP_ia$

   a) Montrer que $a \geq_P z$.
   b) Montrer que $z >_P b$. On pourra procéder par l'absurde en utilisant le fait que $J$ est un ensemble décisif de cardinal minimal.
   c) Montrer que $a >_P b$.
   d) Montrer que $\{j\}$ est un ensemble décisif.
   e) Montrer que $J = \{j\}$.

5. Montrer que la constitution est dictatoriale.
6. Énoncer proprement le théorème ainsi prouvé. Commenter.
7. *Bonus :* Avez-vous des pistes pour contourner cette impossibilité, et créer une constitution parfaite ?

# Correction

## 1 Notations

Supposons qu'il y ait un dictateur, notons-le $j$.

Montrons que la constitution vérifie l'unanimité : soit $(a, b) \in A^2$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $aP_ib$. Alors en particulier, $aP_jb$ car $j \in [\![1, n]\!]$. Donc le dictateur préfère $a$ à $b$, donc au classement final on aura $a \geq_{\mathcal{P}} b$.

Montrons que la constitution vérifie la monotonie : on considère donc $(\mathcal{P}, \mathcal{P}') \in \mathbb{P}^n$ deux listes de choix possibles. Soit $(a, b) \in A^2$, supposons que $\{i \in [\![1, n]\!] \mid aP_ib\} \subset \left\{i \in [\![1, n]\!] \mid aP'_ib\right\}$. (Le nombre d'électeurs préférant $a$ à $b$ à augmenté entre $\mathcal{P}$ et $P'$). Prouvons que $a \geq_{\mathcal{P}} b \quad \Rightarrow \quad a \geq_{\mathcal{P}'} b$.

Supposons donc que $a \geq_{\mathcal{P}} b$ : ceci signifie que dans $\mathcal{P}$ le dictateur préfère $a$ à $b$, *i.e.* $aP_jb$. Donc $j$ est dans l'ensemble $\{i \in [\![1, n]\!] \mid aP_ib\}$. Alors vue l'inclusion, $j$ est aussi dans l'ensemble $\left\{i \in [\![1, n]\!] \mid aP'_ib\right\}$ (le dictateur préfère encore $a$ à $b$ lors de la deuxième élection). Donc $aP'_jb$ et donc $a \geq_{\mathcal{P}'} b$.

## 2 Exemple le plus simple : scrutin uninominal à un tour

Lors de l'élection $\mathcal{P}$, c'est $a$ qui est élu. Lors de $\mathcal{P}'$, c'est $b$ qui est élu, alors que l'ensemble des électeurs préférant $a$ avait augmenté !

Cet exemple prouve que la constitution n'est pas monotone.

## 3 Scrutin uninominal à deux tours

Le même phénomène se répète ici : le passage à deux tours n'a pas réglé le problème.

## 4 Le théorème du dictateur

1. Montrons que $J$ est une partie décisive pour $(a, b)$. Il s'agit donc de prouver que $\forall \mathcal{P}' \in \mathbb{P}^n$, $(\forall i \in J, aP'_ib) \quad \Rightarrow \quad a \geq_{\mathcal{P}'} b$. (*Remarque:* la lettre $\mathcal{P}$ est déjà utilisée dans l'énoncé, nous utilisons donc $\mathcal{P}'$.)

   Nous fixons donc $\mathcal{P}' \in \mathbb{P}^n$, et nous supposons $(\forall i \in J, aP'_ib)$.
   Nous avons par hypothèse :

   $$\{i \in [\![1, n]\!] \mid aP_ib\} = J \quad \text{et} \quad \{i \in [\![1, n]\!] \mid aP_ib\} \supset J$$

   Ainsi, on a l'inclusion $\{i \in [\![1, n]\!] \mid aP_ib\} \subset \left\{i \in [\![1, n]\!] \mid aP'_ib\right\}$, on peut donc appliquer la monotonie. On avait $a \geq_{\mathcal{P}} b$, on déduit que $a \geq_{\mathcal{P}'} b$.

   On a bien obtenu que $(\forall i \in J, aP'_ib) \quad \Rightarrow \quad a \geq_{\mathcal{P}'} b$. Donc $J$ est décisive pour $(a, b)$.

2. a) Soit $\mathcal{P}$ une liste de préférences comme dans l'indication. On constate que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $xP_ia$. Par unanimité, $x \geq_{\mathcal{P}} a$.
   De plus, $\forall i \in J$, $aP_ib$, et comme $J$ est décisive pour $(a, b)$, on déduit que $a \geq_{\mathcal{P}} b$.
   Alors par transitivité, $x \geq_{\mathcal{P}} b$.

   Nous avons ainsi trouvé une liste de préférences $\mathcal{P}$ telle que seuls les électeurs de $J$ préfèrent $x$ à $b$, et au classement final, $x \geq_{\mathcal{P}} b$. C'est le cadre de la question 1 : on déduit que $J$ est décisive pour $(x, b)$.

   b) Même chose en remplaçant $x$ par $y$.

   c) Soit $(x, y) \in A^2$. Par a), $J$ est décisive pour $(x, b)$. Puis par b) appliquée avec $x$ au lieu de $a$, $J$ est décisive pour $(x, y)$.

3. $E \neq \emptyset$ car $[\![1, n]\!]$ est un ensemble décisif (unanimité) donc $n \in E$. Ensuite, $E$ est un ensemble de nombre entiers, il est majoré par 0, donc il admet un minimum (propriétés de $\mathbb{Z}$).

4. a) On constate que $\forall i \in J$, $aP_iz$. Comme $J$ est décisive, au classement final, on aura $a \geq_{\mathcal{P}} z$.

   b) Supposons par l'absurde $z \leq_{\mathcal{P}} b$. Les électeurs de $J \setminus \{j\}$ sont les seuls à préférer $b$ à $z$ et pourtant $b \geq_{\mathcal{P}} z$ : d'après la question 1 $J \setminus \{j\}$ est décisive pour $(b, z)$. Puis d'après 3, $J \setminus \{j\}$ est décisive tout court. Mais ceci contredit le fait que $J$ est une partie décisive minimale.

   c) Par transitivité, $a \geq_{\mathcal{P}} b$.

   d) On obtient $a \geq_{\mathcal{P}} b$ alors que $j$ est le seul individu à préférer $a$ à $b$ : par la question 1) puis 3), $\{j\}$ est décisive.

   e) On a $\{j\} \subset J$. or $\{j\}$ est décisive, et $J$ est décisive minimale, donc $\text{Card}(J) \leq \text{Card}(J)$. Au final, $\text{Card}(J) = \text{Card}(\{j\}) = 1$ et $J = \{j\}$.

5. On a trouvé $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $\{j\}$ soit décisive. Ceci s'écrit ainsi : $\forall (a, b) \in A^2$, $\forall \mathcal{P} \in \mathbb{P}^n$, $(\forall i \in \{j\}, aP_ib) \quad \Rightarrow a \geq_{\mathcal{P}} b$.

   On peut remplacer le "$\forall i \in \{j\}, aP_ib$" par "$aP_jb$", et on obtient alors la définition d'une dictature. (Le dictateur est $j$).

6. Toute constitution vérifiant la monotonie et l'unanimité est une dictature.