Théorème de Morley

Le but de ce problème est de prouver le théorème suivant :

Théorème 1. *Les points d'intersections des trisectrices d'un triangle non aplati forment un triangle équilatéral.*

(Les trisectrices sont les droites qui partagent les angles du triangle en trois angles égaux.)

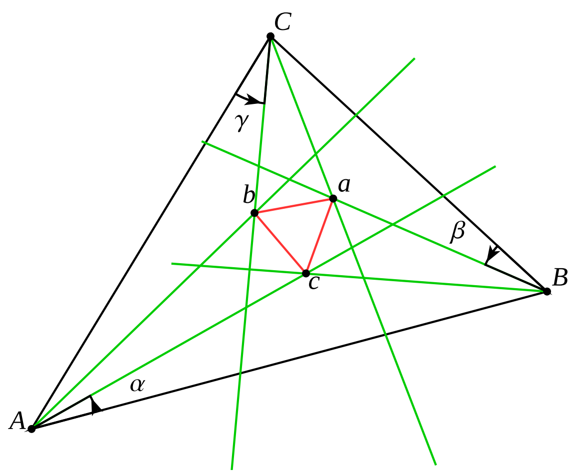
Remarque: Ce théorème a été découvert par Frank Morley en 1898, soit étonnamment tard pour un résultat d'énoncé aussi simple. On peut supposer qu'une raison est l'impossibilité de tracer les trisectrice d'un triangle à la règle et au compas.

Soit donc ABC un triangle non aplati. Nous supposons ABC direct (sinon ACB serait direct, il suffirait de refaire la preuve en échangeant B et C). Donc la mesure principale de chacun des angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ est dans l'intervalle $]0, \pi[$.

On notera a, b, c les sommets du petit triangle comme sur la figure (attention à la calligraphie, bien faire la différence entre c et C), α la mesure principale de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{Ac})$, β celle de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{Ba})$ et γ celle de $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{Cb})$. Ainsi, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ a pour mesure 3α, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ a pour mesure 3β et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ a pour mesure 3γ. De plus, les nombres α, β, γ sont dans l'intervalle $]0, \frac{\pi}{3}[$. On rappelle enfin que la somme des mesure principales des angles d'un triangle, pris dans le sens direct, vaut π. Donc ici, $3\alpha + 3\beta + 3\gamma = \pi$.

Le but du problème est de prouver que abc est équilatéral direct. On propose une preuve utilisant les nombres complexes découverte par Alain Connes en 1998.

On fixe dans tout le problème un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



1 Rotations

1) (cours) Soit F un point, d'affixe z_F. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit r la rotation de centre F d'angle de mesure θ.
   a) Quelle est la formule donnant pour tout point $M \in \mathcal{P}$ d'affixe z, l'affixe de $r(M)$? On ne demande pas de preuve ici.
   b) Montrer qu'il existe $q \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $M \in \mathcal{P}$ d'affixe z, l'affixe de $r(M)$ est $e^{i\theta}.z + q$.
2) Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Soit $b \in \mathbb{C}$. Soit s la similitude directe telle que pour tout point $M \in \mathcal{P}$ d'affixe z, l'affixe de $s(M)$ est $e^{i\theta}.z + b$.
   a) Démontrer que s admet un unique point fixe, qu'on notera F, et préciser l'affixe de celui-ci.
   b) Démontrer que s est alors la rotation de centre F et d'angle de mesure θ.
3) Soit $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$, soient r_1 et r_2 deux rotations d'angles de mesure respectives θ_1 et θ_2.
   Montrer que :
   (i) si $\theta_1 + \theta_2 \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors $r_1 \circ r_2$ est une translation.
   (ii) Sinon, $r_1 \circ r_2$ est une rotation d'angle de mesure $\theta_1 + \theta_2$.

Remarque: Il existe une transformation du plan qui est à la fois une rotation et une translation : c'est $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$.

2 Symétries

Définition 2. *Soit $\mathcal{D}$ une droite. Pour tout $M \in \mathcal{P}$, on note $s_{\mathcal{D}}(M)$ le point du plan vérifiant :*

(i) *la droite $(Ms_{\mathcal{D}}(M))$ est orthogonale à $\mathcal{D}$.*

(ii) $d(M, \mathcal{D}) = d(s_{\mathcal{D}}(M), \mathcal{D})$

(On admet qu'il existe un unique point vérifiant ces deux conditions)

La fonction $s_{\mathcal{D}} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ ainsi définie s'appelle la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}$.

1) (cours) Soient $\vec{a}, \vec{b}$ deux vecteurs d'affixes respectives z et z'. Rappeler la formule donnant $\vec{a}.\vec{b}$ en fonction de z et z'.
2) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Donner l'affixe des vecteurs $\vec{u}(\theta)$ et $\vec{v}(\theta)$.
3) Soit $\mathcal{D}$ une droite. Soit $A \in \mathcal{D}$ et soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u}(\theta)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Le but est de trouver l'expression complexe de la symétrie $s_{\mathcal{D}}$.
   a) Soit $M \in \mathcal{P}$ d'affixe z. Montrer que la distance de M à $\mathcal{D}$ vaut :
   $$d(M, \mathcal{D}) = \left|\mathcal{R}e\left(-ie^{-i\theta}.(z - z_A)\right)\right|$$
   b) Soit $M \in \mathcal{P}$ d'affixe z. Vérifier que l'affixe de $s_{\mathcal{D}}(M)$ est :
   $$e^{2i\theta}.(\overline{z - z_A}) + z_A$$
   c) Que vaut $s_{\mathcal{D}} \circ s_{\mathcal{D}}$?
4) Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites non parallèles. Soient $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ des vecteurs directeurs de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Soit θ une mesure de l'angle $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$. Vérifier que $s_2 \circ s_1$ est une rotation de centre le point d'intersection de ces deux droites et d'angle de mesure 2θ.
   On pourra introduire $(\phi_1, \phi_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\theta = \phi_2 - \phi_1$, $\vec{a}_1$ soit colinéaire à $\vec{u}(\phi_1)$, et $\vec{a}_2$ soit colinéaire à $\vec{u}(\phi_2)$.

3 Résultats simples

On notera $j = \exp(\dfrac{2i\pi}{3})$.

1) (cours) Que valent $1 + j + j^2$ et j^3 ?
2) Soient M, N, O trois points, d'affixes respectives z_M, z_N, z_O. Montrer que MNO est un triangle équilatéral direct si et seulement si $z_M + jz_N + j^2 z_O = 0$.
   Indication: partir du fait que MNO est équilatéral direct si et seulement si O est l'image de N par la rotation de centre M et d'angle de mesure $\pi/3$.
3) Montrer que $e^{2i(\alpha+\beta+\gamma)} = j$.

4 Les sommets du petit triangle vus comme points fixes de rotations

On note ρ_A, ρ_B et ρ_C les rotations respectivement de centre A, B, C et d'angle de mesure $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$.
Si M et N sont deux points distincts, on notera $\sigma_{(MN)}$ la symétrie d'axe (MN).

1) Reconnaître les similitudes directes $\sigma_{(Ac)} \circ \sigma_{(AB)}$ et $\sigma_{(Bc)} \circ \sigma_{(BC)}$.
2) Prouver que $\rho_A \circ \rho_B$ est la rotation de centre c et d'angle de mesure $2\alpha + 2\beta$.
   Décrire de même $\rho_C \circ \rho_A$ et $\rho_B \circ \rho_C$.
3) Montrer que ρ_A^3 est la rotation de centre A et d'angle de mesure 6α. En déduire que $\rho_A^3 = \sigma_{(AC)} \circ \sigma_{(AB)}$. Donner sans justification une écriture analogue pour ρ_B^3 et ρ_C^3.
   Remarque: ρ_A^3 signifie $\rho_A \circ \rho_A \circ \rho_A$.
4) Montrer que $\rho_A^3 \circ \rho_B^3 \circ \rho_C^3 = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$.

5 Calculs complexes

On conserve les notations de la partie précédente. Nous allons maintenant calculer l'écriture complexe des différentes rotations définies à la partie précédente, et déduire du fait que $\rho_A^3 \circ \rho_B^3 \circ \rho_C^3 = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$ l'égalité prouvant que abc est équilatéral.

On notera $z_A, z_a, z_B, z_b, z_C, z_c$ les affixes respectives de A, a, B, b, C, c.

D'après 1.1, il existe $q_A \in \mathbb{C}$ tel que pour tout point $M \in \mathcal{P}$ d'affixe z, l'affixe de $\rho_A(z)$ soit $e^{2i\alpha}.z + q_A$. On fixe un tel q_A dans toute la suite. On fixe q_B et q_C de manière analogue.

1) Soit $M \in \mathcal{P}$ d'affixe z. Montrer que l'affixe de $\rho_A^3(M)$ est :

$$e^{6i\alpha}.z + q_A.(1 + e^{2i\alpha} + e^{4i\alpha})$$

2) Soit $M \in \mathcal{P}$ d'affixe z, montrer que l'affixe de $\rho_A^3 \circ \rho_B^3 \circ \rho_C^3(M)$ est :

$$z \quad + \quad e^{6i(\alpha+\beta)}.q_C(1 + e^{2i\gamma} + e^{4i\gamma}) + e^{6i\alpha}.q_B.(1 + e^{2i\beta} + e^{4i\beta}) + q_A.(1 + e^{2i\alpha} + e^{4i\alpha}) \quad .$$

On pourra utiliser sans justification les formules analogues à celle obtenue ci-dessus pour ρ_B^3 et ρ_C^3.

3) En utilisant la partie précédente, déduire que :

$$j^2 e^{2i(\beta-\gamma)}.q_C(1 + e^{2i\gamma} + e^{4i\gamma}) + je^{2i(\alpha-\beta)}.q_B.(1 + e^{2i\beta} + e^{4i\beta}) + e^{2i(\gamma-\alpha)}.q_A.(1 + e^{2i\alpha} + e^{4i\alpha}) = 0 \quad .$$

4) Montrer que :

$$z_c = \frac{e^{2i\gamma}.(e^{2i\alpha} q_B + q_A)}{e^{2i\gamma} - j}$$

On admettra que de même :

$$z_b = \frac{e^{2i\beta}.(e^{2i\gamma}.q_A + q_C)}{e^{2i\beta} - j} \quad \text{et} \quad z_a = \frac{e^{2i\alpha}.(e^{2i\beta}.q_C + q_B)}{e^{2i\alpha} - j)}$$

Indication: Soit M un point quelconque d'affixe z. Calculer l'affixe de $\rho_A \circ \rho_B(M)$ de deux manières différentes. Utiliser la question 2 de la partie précédente.

5) Finalement, montrer que abc est un triangle équilatéral. On pourra montrer que $z_a + j.z_b + j^2.z_c = 0$.
Indication: Quelques suggestions pour éviter de se perdre dans les calculs : on peut procéder par équivalences pour montrer que l'égalité $z_a + j.z_b + j^2.z_c = 0$ équivaut à l'égalité prouvée en 3. On pourra multiplier par la bonne quantité pour éliminer les fractions. On pourra calculer séparément les coefficients de q_A, q_B et q_C : trois petits calculs sont plus simples à réussir qu'un gros. Enfin, pour chacun de ces calculs, commencer par mettre en facteur ce qu'on peut.

6 17 autres triangles équilatéraux

En analysant la partie précédente, on constate que nous n'avons utilisé que deux hypothèses : $\rho_A^3 \circ \rho_B^3 \circ \rho_C^3 = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$ et $e^{2i(\alpha+\beta+\gamma)} = j$ (autrement dit $2(\alpha+\beta+\gamma) \in \frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}$.

Si $e^{2i(\alpha+\beta+\gamma)}$ valait j^2, on aurait obtenu que $z_a + j^2 z_b + jz_c = 0$, autrement dit abc aurait été équilatéral indirect, c'est le cas qu'on aurait obtenu si au départ ABC était un triangle indirect.

En fait, les calculs de la partie précédente prouvaient :

Proposition 3. *Soient ρ_1, ρ_2, ρ_3 trois rotations, d'angles de mesures respectives $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. On suppose :*

(i) $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \equiv \frac{2\pi}{3}$ *ou* $\frac{4\pi}{3}[2\pi]$

(ii) $\rho_1^3 \circ \rho_2^3 \circ \rho_3^3 = Id_{\mathcal{P}}$

(iii) $\rho_1 \circ \rho_2, \rho_2 \circ \rho_3, \rho_3 \circ \rho_1$ *ne sont pas des translations (ou autrement dit ce sont des rotations)*

Alors les centres des trois rotations $\rho_1 \circ \rho_2, \rho_2 \circ \rho_3, \rho_3 \circ \rho_1$ forment un triangle équilatéral.

1) Soient $\tilde{\rho}_A$ la rotation de centre A et d'angle $2\alpha + \frac{2\pi}{3}$.
Montrer que $\tilde{\rho}_A$, ρ_B, et ρ_C satisfont aux hypothèses de la proposition. Expliquer comment construire le triangle équilatéral obtenu.
Indication: Utiliser la partie sur les symétries, pour décrire le centre de $\tilde{\rho}_A \circ \rho_B$ comme l'intersection de deux droites.

2) En modifiant sur le même principe ρ_A, ρ_B et/ou ρ_C, montrer l'existence de 17 autres triangles équilatéraux.

Remarque: En fait, ces autres triangles équilatéraux correspondent aux intersections des trisectrices "extérieures" du triangle.

7 Bonus : trisectrices

Soient D_1 et D_2 deux droites non parallèles. Soit A leur point d'intersection. Soit $r \in \mathbb{R}^{+*}$, et C le cercle de centre A et de rayon r. Soit P un des deux points d'intersection de C et D_2. Soit Δ la droite passant par P et telle que le deuxième point d'intersection de Δ avec C soit à distance r de P. On notera Q ce deuxième point d'intersection. Enfin, soit R le point d'intersection de Δ avec D_1.

Faire une figure. Montrer que l'angle entre D_1 et D_2 est trois fois celui entre D_1 et Δ.

Expliquer comment tracer la trisectrice de deux droites non parallèles à l'aide d'un compas et d'une règle sur laquelle sont placés deux points à une certaine distance r l'un de l'autre.

(C'est par contre impossible de tracer une trisectrice en utilisant seulement un compas et une règle non graduée.)

Correction : théorème de Morley

1 Rotations

1) a) L'affixe de $r(M)$ est $e^{i\theta}.(z - z_F) + z_F$

b) on développe : $e^{i\theta}.(z - z_F) + z_F = e^{i\theta}.z + z_F.(1 - e^{i\theta})$. Il suffit de choisir $q = z_F.(1 - e^{i\theta})$.

2) a) Soit $M \in \mathcal{P}$, soit z l'affixe de M. Alors :

$$M \text{ est un point fixe de } s \iff s(M) = M \iff e^{i\theta}z + b = z \iff z = \frac{b}{1 - e^{i\theta}}$$

$(1 - e^{i\theta} \neq 0$ car $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z})$.

Ainsi, il y a une et une seule solution, donc s admet un unique point fixe : c'est le point d'affixe $\frac{b}{1 - e^{i\theta}}$.

b) Notons r la rotation de centre F et d'angle de mesure θ. Soit $M \in \mathcal{P}$ d'affixe z. L'image de M par r est le point d'affixe $e^{i\theta}.(z - \frac{b}{1 - e^{i\theta}}) + \frac{b}{1 - e^{i\theta}}$.

Or :

$$e^{i\theta}.(z - \frac{b}{1 - e^{i\theta}}) + \frac{b}{1 - e^{i\theta}} = e^{i\theta}.z - \frac{e^{i\theta}.b + b}{1 - e^{i\theta}} = e^{i\theta}.z - b$$

Ainsi, $r(M) = s(M)$. Ceci vaut quel que soit $M \in \mathcal{P}$, donc s est égal à cette rotation.

3) Soient F_1 et F_2 des centres de r_1 et r_2, soit z_1 l'affixe de F_1 et z_2 l'affixe de F_2.

(i) Supposons $\theta_1 + \theta_2 \in 2\pi\mathbb{Z}$ (donc $e^{i(\theta_1+\theta_2)} = 1$). Soit $M \in \mathcal{P}$ d'affixe z. Calculons l'affixe de $r_1 \circ r_2(M)$.
Le point $r_2(M)$ a pour affixe $e^{i\theta_2}.(z - z_2) + z_2$. Donc $r_1 \circ r_2(M)$ a pour affixe :

$$e^{i\theta_1}.\left((e^{i\theta_2}.(z - z_2) + z_2) - z_1\right) + z_1 = e^{i\theta_1+i\theta_2}.(z - z_2) + e^{i\theta_1}.(z_2 - z_1) + z_2 = z - z_2 + e^{i\theta_1}.(z_2 - z_1) + z_2$$

On constate que $r_1 \circ r_2(M)$ est l'image de M par la translation de vecteur d'affixe $e^{i\theta_1}.(z_2 - z_1)$.

(ii) Supposons $\theta_1 + \theta_2 \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Soit encore $M \in \mathcal{P}$ d'affixe z. Le calcul précédent donne que l'affixe de $r_1 \circ r_2(z)$ vaut :

$$e^{i\theta_1+i\theta_2}.z - z_2.e^{i\theta_1+i\theta_2} + e^{i\theta_1}.(z_2 - z_1) + z_2$$

D'après la question précédente (utilisée avec $\theta = \theta_1 +_t heta_2 \notin 2\pi\mathbb{Z}$ et $b = -z_2.e^{i\theta_1+i\theta_2} + e^{i\theta_1}.(z_2 - z_1) + z_2$), $r_1 \circ r_2$ est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$.

2 Symétries

1. $\vec{a}.\vec{b} = \mathcal{Re}(\overline{z}.z')$.
2. On rappelle que $\vec{u}(\theta)$ a pour coordonnées cartésiennes $(\cos(\theta), \sin(\theta))$. Son affixe est donc $\cos(\theta) + i\sin(\theta)$ ou encore $e^{i\theta}$. De même, l'affixe de $\vec{v}(\theta)$ est $i.e^{i\theta}$.
3. a) Le vecteur $\vec{v}(\theta)$ est normal à $\vec{\mathcal{D}}$. La formule du cours donne donc :

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|\vec{v}(\theta).\overrightarrow{AM}|}{||\vec{v}(\theta)||} = \frac{\left|\mathcal{Re}\left(\overline{i.e^{i\theta}}.(z - z_A)\right)\right|}{1} = \left|\mathcal{Re}\left(\overline{i.e^{i\theta}}.(z - z_A)\right)\right|$$

b) Notons $z' = e^{2i\theta}.(\overline{z - z_A}) + z_A$ et M' le point d'affixe z'. Nous voulons prouver que $M' = s_{\mathcal{D}}(M)$, il faut donc vérifier les deux conditions de la définition.

(i) Montrons que $\overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{\vec{u}(\theta)} = 0$. On calcule le produit scalaire :

$$\overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{\vec{u}(\theta)} = \mathcal{Re}\left(\overline{z' - z}.e^{i\theta}\right) = \qquad \mathcal{Re}\left(\overline{e^{2i\theta}.(\overline{z - z_A}) + z_A - z}.e^{i\theta}\right)$$