Le théorème du dictateur

Une étude mathématique des systèmes de vote

16 mars 2017

Sommaire

Introduction

- théorie du "choix social"

Introduction

- théorie du "choix social"

- Fondée par Kenneth J. Arrow, priw nobel d'économie en 1971.

Sommaire

Quel est votre morceau préféré ?

1. Shakira : Whenever, Wherever
2. AC/DC : Highway to hell
3. Guns and roses : sweet child o' mine
4. Jacque Brel : Quand on n'a que l'amour
5. Antonin Dvorak : Symphonie du nouveau monde

Sommaire

Paradoxe de Condorcet

Pendant la révolution française, le marquis de Condorcet a réfléchi aux systèmes de vote.

Paradoxe de Condorcet

Pendant la révolution française, le marquis de Condorcet a réfléchi aux systèmes de vote.

Il a mis en lumière l'exemple suivant :

Pour 1/3 des électeurs : $a \geq b \geq c$
Pour 1/3 des électeurs : $b \geq c \geq a$
Pour 1/3 des électeurs : $c \geq a \geq b$

Paradoxe de Condorcet

Pendant la révolution française, le marquis de Condorcet a réfléchi aux systèmes de vote.

Il a mis en lumière l'exemple suivant :

Pour 1/3 des électeurs : $a \geq b \geq c$
Pour 1/3 des électeurs : $b \geq c \geq a$
Pour 1/3 des électeurs : $c \geq a \geq b$

Quelle que soit la méthode envisagée, les trois candidats sont à égalité !

Paradoxe de Condorcet

Pendant la révolution française, le marquis de Condorcet a réfléchi aux systèmes de vote.

Il a mis en lumière l'exemple suivant :
Pour 1/3 des électeurs : $a \geq b \geq c$
Pour 1/3 des électeurs : $b \geq c \geq a$
Pour 1/3 des électeurs : $c \geq a \geq b$

Quelle que soit la méthode envisagée, les trois candidats sont à égalité !

Remarque : Un « gagnant de Concorcet » est un candidat qui gagne en duel contre tous les autres.

Sommaire

Contexte de nos exemples

- 5 candidats : Messieurs ou mesdames a, b, c, d et e ;

Contexte de nos exemples

- 5 candidats : Messieurs ou mesdames a, b, c, d et e ;
- 22 électeurs ;

Contexte de nos exemples

- 5 candidats : Messieurs ou mesdames a, b, c, d et e ;
- 22 électeurs ;
- chaque électeur a un *ordre de préférence*.
  Ex : $a \geq e \geq b \geq d \geq c$;

Contexte de nos exemples

- 5 candidats : Messieurs ou mesdames a, b, c, d et e ;
- 22 électeurs ;
- chaque électeur a un *ordre de préférence*.
  Ex : $a \geq e \geq b \geq d \geq c$;
- répartition des préférences :
  Pour 4 électeurs : $a \geq b \geq c \geq d \geq e$
  Pour 5 électeurs : $c \geq b \geq a \geq d \geq e$
  Pour 6 électeurs : $d \geq b \geq a \geq c \geq e$
  Pour 7 électeurs : $e \geq b \geq a \geq c \geq d$.

Sommaire

Scrutin uninominal à un tour

Pour 4 électeurs : $a \geq b \geq c \geq d \geq e$
Pour 5 électeurs : $c \geq b \geq a \geq d \geq e$
Pour 6 électeurs : $d \geq b \geq a \geq c \geq e$
Pour 7 électeurs : $e \geq b \geq a \geq c \geq d$

Scrutin uninominal à un tour

Pour 4 électeurs : $a \geq b \geq c \geq d \geq e$
Pour 5 électeurs : $c \geq b \geq a \geq d \geq e$
Pour 6 électeurs : $d \geq b \geq a \geq c \geq e$
Pour 7 électeurs : $e \geq b \geq a \geq c \geq d$

- e est élu

Scrutin uninominal à un tour

Pour 4 électeurs : $a \geq b \geq c \geq d \geq e$
Pour 5 électeurs : $c \geq b \geq a \geq d \geq e$
Pour 6 électeurs : $d \geq b \geq a \geq c \geq e$
Pour 7 électeurs : $e \geq b \geq a \geq c \geq d$

- e est élu
- Il est haï par 68% de la population

Scrutin uninominal à un tour

Pour 4 électeurs : $a \geq b \geq c \geq d \geq e$
Pour 5 électeurs : $c \geq b \geq a \geq d \geq e$
Pour 6 électeurs : $d \geq b \geq a \geq c \geq e$
Pour 7 électeurs : $e \geq b \geq a \geq c \geq d$

- e est élu
- Il est haï par 68% de la population
- b est globalement apprécié de tous, mais il n'a aucune chance.

Sommaire

Scrutin uninominal à deux tours

Pour 4 électeurs : $a \geq b \geq c \geq d \geq e$
Pour 5 électeurs : $c \geq b \geq a \geq d \geq e$
Pour 6 électeurs : $d \geq b \geq a \geq c \geq e$
Pour 7 électeurs : $e \geq b \geq a \geq c \geq d$

Scrutin uninominal à deux tours

Pour 4 électeurs : $a \geq b \geq c \geq d \geq e$
Pour 5 électeurs : $c \geq b \geq a \geq d \geq e$
Pour 6 électeurs : $d \geq b \geq a \geq c \geq e$
Pour 7 électeurs : $e \geq b \geq a \geq c \geq d$

- d et e vont au second tour

Scrutin uninominal à deux tours

Pour 4 électeurs : $a \geq b \geq c \geq d \geq e$
Pour 5 électeurs : $c \geq b \geq a \geq d \geq e$
Pour 6 électeurs : $d \geq b \geq a \geq c \geq e$
Pour 7 électeurs : $e \geq b \geq a \geq c \geq d$

- d et e vont au second tour
- d est élu

Scrutin uninominal à deux tours

Pour 4 électeurs : $a \geq b \geq c \geq d \geq e$
Pour 5 électeurs : $c \geq b \geq a \geq d \geq e$
Pour 6 électeurs : $d \geq b \geq a \geq c \geq e$
Pour 7 électeurs : $e \geq b \geq a \geq c \geq d$

- d et e vont au second tour
- d est élu
- Un deuxième tour permet d'éviter que le pire candidat soit élu.

Scrutin uninominal à deux tours

Pour 4 électeurs : $a \geq b \geq c \geq d \geq e$
Pour 5 électeurs : $c \geq b \geq a \geq d \geq e$
Pour 6 électeurs : $d \geq b \geq a \geq c \geq e$
Pour 7 électeurs : $e \geq b \geq a \geq c \geq d$

- d et e vont au second tour
- d est élu
- Un deuxième tour permet d'éviter que le pire candidat soit élu.
- d est mal aimé de 73% des électeurs. Le candidat « raisonnable » b n'a toujours aucune chance.

Ce scrutin est "manipulable"

Les 4 premiers électeurs, conscients que leur candidat n'a aucune chance, décident de voter pour c :

Pour 4 électeurs : $a \geq c \geq b \geq d \geq e$
Pour 5 électeurs : $c \geq b \geq a \geq d \geq e$
Pour 6 électeurs : $d \geq b \geq a \geq c \geq e$
Pour 7 électeurs : $e \geq b \geq a \geq c \geq d$

Ce scrutin est "manipulable"

Les 4 premiers électeurs, conscients que leur candidat n'a aucune chance, décident de voter pour c :

Pour 4 électeurs :	$c \geq a \geq b \geq d \geq e$
Pour 5 électeurs :	$c \geq b \geq a \geq d \geq e$
Pour 6 électeurs :	$d \geq b \geq a \geq c \geq e$
Pour 7 électeurs :	$e \geq b \geq a \geq c \geq d$

Ce scrutin est "manipulable"

Les 4 premiers électeurs, conscients que leur candidat n'a aucune chance, décident de voter pour c :

Pour 4 électeurs : $c \geq a \geq b \geq d \geq e$
Pour 5 électeurs : $c \geq b \geq a \geq d \geq e$
Pour 6 électeurs : $d \geq b \geq a \geq c \geq e$
Pour 7 électeurs : $e \geq b \geq a \geq c \geq d$

- c est élu.

Ce scrutin est "manipulable"

Les 4 premiers électeurs, conscients que leur candidat n'a aucune chance, décident de voter pour c :

Pour 4 électeurs : $c \geq a \geq b \geq d \geq e$
Pour 5 électeurs : $c \geq b \geq a \geq d \geq e$
Pour 6 électeurs : $d \geq b \geq a \geq c \geq e$
Pour 7 électeurs : $e \geq b \geq a \geq c \geq d$

- c est élu.
- Il vaut souvent mieux ne pas voter pour son candidat préféré.

Ce scrutin est "manipulable"

Les 4 premiers électeurs, conscients que leur candidat n'a aucune chance, décident de voter pour c :

Pour 4 électeurs :	$c \geq a \geq b \geq d \geq e$
Pour 5 électeurs :	$c \geq b \geq a \geq d \geq e$
Pour 6 électeurs :	$d \geq b \geq a \geq c \geq e$
Pour 7 électeurs :	$e \geq b \geq a \geq c \geq d$

- c est élu.
- Il vaut souvent mieux ne pas voter pour son candidat préféré.
- C'est le concept du « vote utile ».

Au fait, à quelle question répond-on lors d'une élection ?

Au fait, à quelle question répond-on lors d'une élection ?

Quelle personne vous parait la plus apte à exercer le rôle de président de la république française ?

Au fait, à quelle question répond-on lors d'une élection ?

Compte tenu des règles du scrutin, trop compliquées pour être rappelées ici, compte tenu des sondages et autres rumeurs que vous avez entendues, quel bulletin mettrez-vous dans l'urne dans l'espoir de favoriser l'élection d'un candidat qui vous convienne à peu près ?

Le scrutin n'est pas "monotone"

d propose de supprimer les cours de maths au lycée. Il a convaincu 3 électeurs :

Pour 4 électeurs :	$a \geq b \geq c \geq d \geq e$
Pour 5 électeurs :	$c \geq b \geq a \geq d \geq e$
Pour 6 électeurs :	$d \geq b \geq a \geq c \geq e$
Pour 7 électeurs :	$e \geq b \geq a \geq c \geq d$

Le scrutin n'est pas "monotone"

d propose de supprimer les cours de maths au lycée. Il a convaincu 3 électeurs :

Pour 4 électeurs :	$a \geq b \geq c \geq d \geq e$
Pour 5 électeurs :	$c \geq b \geq a \geq d \geq e$
Pour 6 électeurs :	$d \geq b \geq a \geq c \geq e$
Pour 4 électeurs :	$e \geq b \geq a \geq c \geq d$
Pour 3 électeurs :	$d \geq e \geq b \geq a \geq c$

Le scrutin n'est pas "monotone"

d propose de supprimer les cours de maths au lycée. Il a convaincu 3 électeurs :

Pour 4 électeurs :	$a \geq b \geq c \geq d \geq e$
Pour 5 électeurs :	$c \geq b \geq a \geq d \geq e$
Pour 6 électeurs :	$d \geq b \geq a \geq c \geq e$
Pour 4 électeurs :	$e \geq b \geq a \geq c \geq d$
Pour 3 électeurs :	$d \geq e \geq b \geq a \geq c$

- d et c vont au second tour ;

Le scrutin n'est pas "monotone"

d propose de supprimer les cours de maths au lycée. Il a convaincu 3 électeurs :

Pour 4 électeurs :	$a \geq b \geq c \geq d \geq e$
Pour 5 électeurs :	$c \geq b \geq a \geq d \geq e$
Pour 6 électeurs :	$d \geq b \geq a \geq c \geq e$
Pour 4 électeurs :	$e \geq b \geq a \geq c \geq d$
Pour 3 électeurs :	$d \geq e \geq b \geq a \geq c$

- d et c vont au second tour ;
- c gagne.

Le scrutin n'est pas "monotone"

d propose de supprimer les cours de maths au lycée. Il a convaincu 3 électeurs :

Pour 4 électeurs : $a \geq b \geq c \geq d \geq e$
Pour 5 électeurs : $c \geq b \geq a \geq d \geq e$
Pour 6 électeurs : $d \geq b \geq a \geq c \geq e$
Pour 4 électeurs : $e \geq b \geq a \geq c \geq d$
Pour 3 électeurs : $d \geq e \geq b \geq a \geq c$

- d et c vont au second tour ;
- c gagne.
- La campagne de presse réussie de d lui a fait perdre l'élection !

Le scrutin favorise l'abstention

Trois électeurs préfèrent aller à la piscine le jour de l'élection :

Pour 4 électeurs :	$a \geq b \geq c \geq d \geq e$
Pour 5 électeurs :	$c \geq b \geq a \geq d \geq e$
Pour 6 électeurs :	$d \geq b \geq a \geq c \geq e$
Pour 7 électeurs :	$e \geq b \geq a \geq c \geq d$

Le scrutin favorise l'abstention

Trois électeurs préfèrent aller à la piscine le jour de l'élection :

Pour 4 électeurs :	$a \geq b \geq c \geq d \geq e$
Pour 5 électeurs :	$c \geq b \geq a \geq d \geq e$
Pour 6 électeurs :	$d \geq b \geq a \geq c \geq e$
Pour 4 électeurs :	$e \geq b \geq a \geq c \geq d$

Le scrutin favorise l'abstention

Trois électeurs préfèrent aller à la piscine le jour de l'élection :

Pour 4 électeurs :	$a \geq b \geq c \geq d \geq e$
Pour 5 électeurs :	$c \geq b \geq a \geq d \geq e$
Pour 6 électeurs :	$d \geq b \geq a \geq c \geq e$
Pour 4 électeurs :	$e \geq b \geq a \geq c \geq d$

- c est élu

Le scrutin favorise l'abstention

Trois électeurs préfèrent aller à la piscine le jour de l'élection :

Pour 4 électeurs :	$a \geq b \geq c \geq d \geq e$
Pour 5 électeurs :	$c \geq b \geq a \geq d \geq e$
Pour 6 électeurs :	$d \geq b \geq a \geq c \geq e$
Pour 4 électeurs :	$e \geq b \geq a \geq c \geq d$

- c est élu
- Ces trois électeurs ont bien fait de s'abstenir !

Sommaire

Hypothèses

Soit C une constitution. Nous supposons vérifiées les hypothèses suivantes :

Hypothèses

Soit C une constitution. Nous supposons vérifiées les hypothèses suivantes :

1. "unanimité" : Si tous les électeurs préfèrent le candidat x, c'est lui qui est élu.

Hypothèses

Soit C une constitution. Nous supposons vérifiées les hypothèses suivantes :

1. "unanimité" : Si tous les électeurs préfèrent le candidat x, c'est lui qui est élu.
2. "monotonie" : Entre deux élections, si le nombre d'électeurs qui préfèrent un candidat x augmente, alors son classement final ne diminue pas.

Conclusion

Théorème

(Arrow, 1951) Une constitution vérifiant les deux conditions précédentes est :

Conclusion

Théorème

(Arrow, 1951) Une constitution vérifiant les deux conditions précédentes est : une dictature.

Plan de démonstration

Plan de démonstration

1. Nous appelons une "oligarchie" tout ensemble d'électeurs qui, s'ils sont d'accord, peuvent imposer leur choix.

Plan de démonstration

1. Nous appelons une "oligarchie" tout ensemble d'électeurs qui, s'ils sont d'accord, peuvent imposer leur choix.
2. Par exemple l'ensemble de tous les électeurs est une oligarchie, vue la condition d'unanimité.

Plan de démonstration

1. Nous appelons une "oligarchie" tout ensemble d'électeurs qui, s'ils sont d'accord, peuvent imposer leur choix.
2. Par exemple l'ensemble de tous les électeurs est une oligarchie, vue la condition d'unanimité.
3. Soit O l'oligarchie formée du plus petit nombre possible d'électeurs.

Plan de démonstration

1. Nous appelons une "oligarchie" tout ensemble d'électeurs qui, s'ils sont d'accord, peuvent imposer leur choix.
2. Par exemple l'ensemble de tous les électeurs est une oligarchie, vue la condition d'unanimité.
3. Soit O l'oligarchie formée du plus petit nombre possible d'électeurs.
4. [...]

Plan de démonstration

1. Nous appelons une "oligarchie" tout ensemble d'électeurs qui, s'ils sont d'accord, peuvent imposer leur choix.
2. Par exemple l'ensemble de tous les électeurs est une oligarchie, vue la condition d'unanimité.
3. Soit O l'oligarchie formée du plus petit nombre possible d'électeurs.
4. [...]
5. On prouve que O est formée d'un seul électeur.

La constitution parfaite

Alors, que faire ?

La constitution parfaite

Alors, que faire ?

1. vérifier la preuve du théorème

La constitution parfaite

Alors, que faire ?

1. vérifier la preuve du théorème
   `http://pauvre.org/~ccharign/divers.html`

La constitution parfaite

Alors, que faire ?

1. vérifier la preuve du théorème `http://pauvre.org/~ccharign/divers.html`
2. éviter les hypothèses du théorème.

La constitution parfaite

Alors, que faire ?

1. vérifier la preuve du théorème
   `http://pauvre.org/~ccharign/divers.html`
2. éviter les hypothèses du théorème.
   Par exemple : remplacer les ordres de préférence par des notes ?

La constitution parfaite

Alors, que faire ?

1. vérifier la preuve du théorème
   `http://pauvre.org/~ccharign/divers.html`
2. éviter les hypothèses du théorème.
   Par exemple : remplacer les ordres de préférence par des notes ?
3. sur internet :
   - `www.votedevaleur.org`
   - `rangevoting.org`

Résumé de démonstration

1. Rappel : O est une oligarchie la plus petite possible.

Résumé de démonstration

1. Rappel : O est une oligarchie la plus petite possible.
2. Fixons v un des membres de O.

Résumé de démonstration

1. Rappel : O est une oligarchie la plus petite possible.
2. Fixons v un des membres de O.
3. Considérons la situation suivante :

$$\begin{array}{rl} \text{pour } v : & a \geq b \geq c \\ \text{pour les autres membres de } O\ (O \setminus \{v\}) : & b \geq c \geq a \\ \text{pour le reste des électeurs} : & c \geq a \geq b. \end{array}$$

Résumé de démonstration

1. Rappel : O est une oligarchie la plus petite possible.
2. Fixons v un des membres de O.
3. Considérons la situation suivante :

$$\begin{aligned} \text{pour } v : &\quad a \geq b \geq c \\ \text{pour les autres membres de } O\ (O \setminus \{v\}) : &\quad b \geq c \geq a \\ \text{pour le reste des électeurs} : &\quad c \geq a \geq b. \end{aligned}$$

4. Les membres de l'oligarchie imposent $b \geq c$.

Résumé de démonstration

1. Rappel : O est une oligarchie la plus petite possible.
2. Fixons v un des membres de O.
3. Considérons la situation suivante :

$$\begin{array}{rc} \text{pour } v : & a \geq b \geq c \\ \text{pour les autres membres de } O\ (O \setminus \{v\}) : & b \geq c \geq a \\ \text{pour le reste des électeurs :} & c \geq a \geq b. \end{array}$$

4. Les membres de l'oligarchie imposent $b \geq c$.
5. Pour tous sauf v, on a $c \geq a$.

Résumé de démonstration

1. Rappel : O est une oligarchie la plus petite possible.
2. Fixons v un des membres de O.
3. Considérons la situation suivante :

$$\begin{array}{rc} \text{pour } v : & a \geq b \geq c \\ \text{pour les autres membres de } O\ (O \setminus \{v\}) : & b \geq c \geq a \\ \text{pour le reste des électeurs :} & c \geq a \geq b. \end{array}$$

4. Les membres de l'oligarchie imposent $b \geq c$.
5. Pour tous sauf v, on a $c \geq a$.
6. On a $b \geq c \geq a$, donc $b \geq a$.

Résumé de démonstration

1. Rappel : O est une oligarchie la plus petite possible.
2. Fixons v un des membres de O.
3. Considérons la situation suivante :

$$\begin{array}{rl} \text{pour } v : & a \geq b \geq c \\ \text{pour les autres membres de } O\ (O \setminus \{v\}) : & b \geq c \geq a \\ \text{pour le reste des électeurs} : & c \geq a \geq b. \end{array}$$

4. Les membres de l'oligarchie imposent $b \geq c$.
5. Pour tous sauf v, on a $c \geq a$.
6. On a $b \geq c \geq a$, donc $b \geq a$.
7. Les membres de $O \setminus \{v\}$ ont pu imposer que $b \geq a$: c'est une oligarchie !

Résumé de démonstration

1. Rappel : O est une oligarchie la plus petite possible.
2. Fixons v un des membres de O.
3. Considérons la situation suivante :

$$\begin{aligned} \text{pour } v : &\quad a \geq b \geq c \\ \text{pour les autres membres de } O\ (O \setminus \{v\}) : &\quad b \geq c \geq a \\ \text{pour le reste des électeurs} : &\quad c \geq a \geq b. \end{aligned}$$

4. Les membres de l'oligarchie imposent $b \geq c$.
5. Pour tous sauf v, on a $c \geq a$.
6. On a $b \geq c \geq a$, donc $b \geq a$.
7. Les membres de $O \setminus \{v\}$ ont pu imposer que $b \geq a$: c'est une oligarchie !
8. Mais O était une oligarchie minimale : absurde !

Résumé de démonstration

1. Rappel : O est une oligarchie la plus petite possible.
2. Fixons v un des membres de O.
3. Considérons la situation suivante :
$$\begin{array}{rl} \text{pour } v : & a \geq b \geq c \\ \text{pour les autres membres de } O\ (O \setminus \{v\}) : & b \geq c \geq a \\ \text{pour le reste des électeurs :} & c \geq a \geq b. \end{array}$$
4. Les membres de l'oligarchie imposent $b \geq c$.
5. Pour tous sauf v, on a $c \geq a$.
6. On a $b \geq c \geq a$, donc $b \geq a$.
7. Les membres de $O \setminus \{v\}$ ont pu imposer que $b \geq a$: c'est une oligarchie !
8. Mais O était une oligarchie minimale : absurde !

Résumé de démonstration

1. Rappel : O est une oligarchie la plus petite possible.
2. Fixons v un des membres de O.
3. Considérons la situation suivante :

$$\begin{array}{rl} \text{pour } v : & a \geq b \geq c \\ \text{pour les autres membres de } O\ (O \setminus \{v\}) : & b \geq c \geq a \\ \text{pour le reste des électeurs :} & c \geq a \geq b. \end{array}$$

4. Les membres de l'oligarchie imposent $b \geq c$.
5. Pour tous sauf v, on a $c \geq a$.
6. On a $b \geq c \geq a$, donc $b \geq a$.
7. Les membres de $O \setminus \{v\}$ ont pu imposer que $b \geq a$: c'est une oligarchie !
8. Mais O était une oligarchie minimale : absurde !
9. v est un dictateur !