Rappels : la méthode d'Euler

C. Charignon

Table des matières

Première partie

Cours

1 Présentation du problème

Une équation différentielle (d'ordre 1) est une équation liant une fonction et sa dérivée. En général, une équation différentielle s'écrira ainsi, en notant I l'intervalle sur lequel on veut la résoudre :

$$\forall t \in I,\ F(f(t), f'(t)) = 0,$$

d'inconnue f, F étant une fonction fixée.

Cependant, dans de nombreux cas on peut réécrire l'équation pour exprimer $f'(t)$ en fonction de $f(t)$. L'équation différentielle sera alors de la forme : $\forall t \in I, f'(t) = F(f(t))$. ($F$ étant une fonction fixée, ce n'est pas la même F que ci-dessus.)

Enfin, une généralisation est possible : une équation comme ci-dessus s'appelle une équation "autonome". Mais souvent, $f'(t)$ peut être exprimé à l'aide de $f'(t)$ mais aussi de t. Ainsi, l'équation à résoudre serait plutôt de la forme :

$\forall t \in I, f'(t) = F\left(f(t), t\right)$.

Nous nous attacherons à résoudre ce type d'équations dans la suite.

Nous fixons donc un intervalle I, et une fonction $F : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}$. On considère l'équation :

$$(E)\ \forall t \in I, \quad f'(t) = F(f(t), t)$$

d'inconnu $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.

Vous verrez en mathématique qu'à condition que F soit C^1, étant donné $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique fonction f vérifiant (E) et vérifiant en outre $f(t_0) = y_0$ (théorème de Cauchy-Lipschitz).

Dans la suite, nous fixons donc $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, nous fixons f l'unique solution de (E) vérifiant $f(t_0) = y_0$. Et nous cherchons à calculer une approximation de f.

2 Présentation de la méthode

Soit $a \in I$. Comme f est dérivable, on peut faire son DL1(a) :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + O_{h\to 0}(h^2)$$

Remarque : En notations physique : $f(a + dx) = f(a) + f'(a)dx$. (On remplace la quantité qui tend vers 0 par un dx, et on oublie le "grand O").

Vue l'équation (E) ceci devient immédiatement :

$$f(a+h) = f(a) + h \times F\left(f(a), a\right) + O_{h\to 0}\left(h^2\right)$$

Le principe de la méthode d'Euler est tout simplement de choisir un h assez petit et d'oublier le $O(h^2)$. Ce nombre h sera appelé le "pas". La formule ci-dessus permet alors de calculer $f(a+h)$ une fois qu'on connaît $f(a)$. Comme on connaît initialement $f(t_0)$, on peut déduire de proche en proche tous les $f(t_0+hn)$.

Remarque : Entre t_0+hn et $t_0+h(n+1)$, on supposera f affine, donc pour tracer le graphe, on tracera juste le segment de droite reliant les deux points calculés.

Formellement : fixons $h \in \mathbb{R}^{+*}$, notons pour tout $n \in \mathbb{Z}$ $t_n = t_0 + nh$ et définissons la fonction f_h ainsi (c'est elle que nous allons calculer et qui approchera f) :

$$\begin{cases} f_h(t_0) = y_0 \\ \forall n \in \mathbb{Z}, f_h(t_{n+1}) = f_h(t_n) + F\left(f_h(t_n), t_n\right) \\ \forall n \in \mathbb{Z}, f \text{ est affine et continue sur } [t_n, t_{n+1}] \end{cases}.$$

Remarque : À chaque pas, l'erreur commise est de l'ordre de h^2. En n pas, on aura une erreur de l'ordre de nh^2. Par exemple pour $1/h$ pas (*i.e.* avancer de 1 dans le temps), l'erreur est en $O(h)$.

Lorsque $h \to 0$, l'erreur tend vers 0, et la fonction approchée converge vers la solution réelle. Notez que sur $\mathbb{R}^+$ la convergence sera en général simple mais pas uniforme.

3 Algorithme

Aucune difficulté. Nous allons utiliser une variable `t` pour enregistrer la valeur de t_n, une variable `y` pour enregistrer $f_h(t_n)$.

Comme nous allons vouloir tracer les courbes obtenues, on propose de prendre en argument t_0, t_f, F, h et de renvoyer le tableau des valeurs de t_n et de $f_h(t_n)$ pour tout n tel que $t_n \in [t_0, t_f]$.

4 Variantes

Il existe de nombreuses variantes de la méthode d'Euler...

- Pour une équation du second ordre (très fréquent en physique)
- Pour plusieurs inconnues

Et de nombreuses optimisations :

- Méthode de Runge Kutta : on évalue f' pas seulement en t_n mais aussi en divers points intermédiaires entre t_n et t_{n+1}.
- Méthode d'Euler implicite : on utilise $f'(t_{n+1})$ au lieu de $f'(t_n)$. Mais comme on n'a pas encore calculé $f(t_{n+1})$, on se retrouve avec une équation à résoudre. **cf exercice:** 3
- Méthode semi-implicite pour des systèmes d'équation : voir l'exercice 2.
- Méthode de Verlet (centrale 2015), utile pour une équation du second ordre. On utilise la valeur $f_h(t_n)$ mais aussi $f_h(t_{n-1})$. Voir l'exercice 1.
- Méthode leapfrog (saute-mouton) : pour une équation du second ordre. On calcule des valeurs de f aux points t_n et des valeurs de f' aux points $t_n + \frac{h}{2}$

Deuxième partie

Exercices

Révision : la méthode d'Euler

On propose trois exercices proposant des variantes de la méthode d'Euler : le premier étudie une équation d'ordre deux, le second un système d'équations, et le troisième la méthode d'Euler semi-implicite.

Exercice 1. Ordre 2

Les deux premières questions sont à considérer comme des questions de cours.

1. Adapter la méthode d'Euler pour résoudre une équation de la forme $f'' = F(f', f)$ (autonome, mais du second ordre).
2. Traiter l'exemple du pendule simple.
3. *(méthode de Verlet)* Grâce à la formule de Taylor, montrer que pour toute fonction f de classe de C^4, pour tout $t \in D_f$,
$$f(t+h) = 2f(t) - f(t-h) + f''(t)h^2 + O_{h\to 0}(h^4)$$
En déduire une méthode de résolution plus précise que la méthode d'Euler. Comparer les simulations. On se limitera au cas d'une équation où f'' ne dépend que de f. Ainsi, il ne sera pas nécessaire de calculer f' pour appliquer la formule ci-dessus.
Remarque : La méthode de Verlet est donc particulièrement pratique lorsque l'équation ne fait pas intervenir la dérivée première. Le défaut est qu'on n'aura pas calculé cette dérivée première, qu'il serait dans certains cas utile de connaître.

Exercice 2. Proies prédateurs (équations de Lotka-Volterra)

On considère deux espèces animales. L'une (les prédateurs) mange l'autre (les proies). On note à tout instant t $x(t)$ et $y(t)$ la quantité de chaque espèce. On suppose qu'il existe des constantes $a, b, c, d \in (\mathbb{R}^{+*})^4$ telle que :

$$\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \end{cases}$$

Interprétation : xy est proportionnel à la probabilité qu'une proie rencontre un prédateur. Et lorsque cela arrive, le nombre de proies diminue, et le nombre de prédateurs augmente.

1. Entre x et y, laquelle représente le nombre de proies ? Laquelle le nombre de prédateurs ?
2. Adapter la méthode d'Euler pour calculer des valeurs approchées de x et y.
Quel semble être le comportement de $x(t)$ et $y(t)$ lorsque $t \to \infty$?
3. On pose $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & bv + du - a\ln(v) - c\ln(u) \end{array}$. Démontrer que la fonction $t \mapsto F(x(t), y(t))$ est constante.
On peut donc dire que la quantité F est conservée au fil du temps. Ainsi, F a le même rôle que l'énergie dans un problème physique. On dit que F est une intégrale première du système.
4. Dans le fichier joint vous trouverez une fonction pour tracer les courbes de niveau de F, *i.e.* les courbes sur lesquelles F est constante.
En traçant simultanément ces courbes de niveau et la trajectoire de (x, y), préciser vos conjectures quant à l'évolution de $(x(t), y(t))$ quand t tend vers $+\infty$.

5. La méthode d'Euler normale consiste à calculer les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que
$$\begin{cases} x_{n+1} = h(ax_n - bx_ny_n) \\ y_{n+1} = h(-cy_n + dx_ny_n) \end{cases}.$$
On appelle la méthode d'Euler semi-implicite celle consistant à employer la relation de récurrence suivante : $\begin{cases} x_{n+1} = h(ax_n - bx_ny_n) \\ y_{n+1} = h(-cy_n + dx_{n+1}y_n) \end{cases}$.

(a) Aviez-vous utilisé la méthode normale ou la méthode semi-implicite ?
(b) Comparer expérimentalement les deux.

6. Calculer la valeur moyenne de x et de y au cours du temps.
7. On suppose que nos deux espèces sont des poissons. On veut étudier l'influence de la pêche : on rajoute un terme en $-\varepsilon x$ dans la première équation et $-\varepsilon y$ dans la seconde (on pêche indifféremment proies ou prédateurs, plus il y en a et plus on en pêche).
Calculer les nouvelles valeurs moyennes. Commentaires ?

Exercice 3. **! Méthode de Newton et Euler implicite

La méthode d'Euler implicite est une variante de la méthode d'Euler qui utilise la méthode de Newton.

1. **Un peu de théorie sur la méthode de Newton**
Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$, et $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = 0$.
(a) Programmer la méthode de Newton pour obtenir une suite u qu'on espère converger vers α.
(b) Puis, essayer la fonction $x \mapsto \sin(x) - e^{-x}$ avec des valeur initiales autour de 2.
(c) *Un cas de convergence :* On suppose f convexe et croissante, on suppose de plus que $\alpha \leqslant x_0$.
Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$.
En déduire que u converge vers α.
(d) *Test d'arrêt :* On suppose que u converge.
i. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\exists c_n \in [\alpha, u_n] \cup [u_n, \alpha]$ tel que $u_{n+1} - \alpha = g'(u_n) \cdot (u_n - \alpha)$. En déduire que $u_{n+1} - u_n = (g'(c_n) - 1) \cdot (u_n - \alpha)$
ii. Montrer que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n - \alpha| \leqslant (1 + \varepsilon)|u_n - u_{n+1}|$.

2. **Méthode d'Euler implicite :**
Soit I un intervalle et $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On souhaite résoudre l'équation différentielle $\forall t \in [t_0, \infty[$, $f'(t) = F\big(f(t), t\big)$ d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1([t_0, \infty[\,, \mathbb{R})$. On suppose connu $f(t_0)$.
On se base sur la formule :
$$\forall t \in \,]t_0, \infty[\,, \quad f(t+h) \underset{h \to 0}{=} f(t) + hF\big(f(t+h), t+h\big) + O(h^2).$$
Ceci nous mène à définir une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi : on fixe un pas $h \in \mathbb{R}^{+*}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $t_n = t0 + hn$, et on définit la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :
$$\begin{cases} y_0 = f(t_0) \\ \forall n \in \mathbb{N}, y_{n+1} = y_n + hF(y_{n+1}, t_{n+1}) \qquad (*) \end{cases}.$$
On supposera que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique y_{n+1} vérifiant l'égalité ci-dessus...
Programmer cette méthode, la résolution de $(*)$ s'effectuera par la méthode de Newton.

3. **Schéma prédicteur-correcteur :** La méthode d'Euler implicite n'est pas plus précise que la méthode d'Euler implicite. Cependant, elle ouvre de nouvelles possibilités : les méthodes de type « prédicteur-correcteur » qui consistent à effectuer une première estimation par une méthode explicite, puis à utiliser celle-ci dans un schéma implicite pour améliorer (corriger) cette première estimation.
Voici un exemple simple : on va utiliser une méthode d'Euler classique comme prédicteur, et une méthode des trapèzes comme correcteur.
(a) Vérifier que $f(x+h) = f(x) + \frac{1}{2}\big(f'(x) + f'(x+h)\big) + O(h^3)$. (On reconnaît le principe de la méthode des trapèzes).
(b) On utile alors la relation de récurrence suivante pour définir la suite y_n :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}\big(F(y_n, t_n) + F(y_{n+1}, t_{n+1})\big).$$
Programmer cette méthode et comparer.