EXERCICES DE LOGIQUE DE CCP

Exercice n° 1. *Exo de logique de CCP 2017*
Imaginez-vous ethnologue. Vous étudiez une peuplade primitive qui présente un comportement manichéen extrême : lorsque plusieurs personnes participent à une même conversation sur un sujet donné, elles vont toutes avoir le même comportement manichéen tant que la conversation reste sur le même sujet, c'est-à-dire que toutes les affirmations seront soit des vérités, soit des mensonges. Par contre, si le sujet de la conversation change, la nature des affirmations, soit mensonge, soit vérité, peut changer, mais toutes les affirmations seront de la même nature tant que le sujet ne changera pas à nouveau.
Pour être autorisé à séjourner dans cette peuplade, vous devez respecter cette règle. Vous participez à une conversation avec trois de leurs membres que nous appellerons X, Y et Z. Ceux-ci vous indiquent comment rejoindre leur village. Si vous n'arrivez pas à le rejoindre, vous ne serez pas autorisé à y séjourner.

Le premier sujet abordé est la région dans laquelle se trouve le village :

X indique : « Le village se trouve dans la vallée » ;
Z réplique : « Non, il ne s'y trouve pas » ;
X reprend : « Ou alors dans les collines ».

Nous noterons V et C les variables propositionnelles associées à la région dans laquelle se trouve le village.
Nous noterons X_1 et Z_1 les formules propositionnelles correspondant aux affirmations de X et de Z sur le premier sujet.

Puis, le second sujet est abordé : le chemin qui permet de rejoindre le village dans la région concernée.

X dit : « Le chemin de gauche conduit au village » ;
Z répond : « Tu as raison » ;
X complète : « Le chemin de droite y conduit aussi » ;
Y affirme : « Si le chemin du milieu y conduit, alors celui de droite n'y conduit pas » ;
Z indique : « Celui du milieu n'y conduit pas ».

Nous noterons G, M et D les variables propositionnelles correspondant respectivement au fait que le chemin de gauche, du milieu et de droite, conduit au village.
Nous noterons X_2, Y_2 et Z_2 les formules propositionnelles correspondant aux affirmations de X, de Y et de Z sur le second sujet.

a) Représenter le comportement manichéen des interlocuteurs dans le premier sujet abordé sous la forme d'une formule du calcul des propositions dépendant des formules propositionnelles X_1 et Z_1.
b) Représenter les informations données par les participants sous la forme de deux formules du calcul des propositions X_1 et Z_1 dépendant des variables V et C.
c) En utilisant la résolution avec les propriétés des opérateurs booléens et les formules de De Morgan en calcul des propositions, déterminer dans quelle région vous devez vous rendre pour rejoindre le village.
d) Représenter le comportement manichéen des interlocuteurs dans le second sujet abordé sous la forme d'une formule du calcul des propositions dépendant des formules propositionnelles X_2, Y_2 et Z_2.
e) Représenter les informations données par les participants sous la forme de trois formules du calcul des propositions X_2, Y_2 et Z_2 dépendant des variables G, M et D.
f) En utilisant la résolution avec les tables de vérité en calcul des propositions, déterminer quel chemin vous devez suivre pour rejoindre le village.
g) En admettant que les trois participants aient menti, pouviez-vous prendre d'autres chemins ? Si oui, le ou lesquels ?

Correction

a) La règle peut s'écrire : $X_1Z_1 + \overline{X}_1\overline{Z}_1$

b) $X_1 = V + C$
$Z_1 = \overline{V}$

c) $X_1Z_1 + \overline{X}_1\overline{Z}_1$
donc $(V+C)\overline{V} + \overline{V+C}\cdot V$
donc $\cancel{V\overline{V}} + C\overline{V} + \cancel{\overline{V}\,\overline{C}}V$

donc $C\overline{V}$

Le village se trouve dans les collines et pas dans la vallée.

d) Pour le deuxième sujet abordé, la règle peut s'écrire : $X_1Y_1Z_1 + \overline{X}_1\overline{Y}_1\overline{Z}_1$

e) $X_2 = GD$
$Y_2 = M \to \overline{D} = \overline{M} + \overline{D}$
$Z_2 = G\overline{M}$

f) Table de vérité :

G	M	D	X_2	Y_2	Z_2	règle
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0	0

La règle est respectée dans deux cas qui sont les cas $\overline{G}MD$ et $G\overline{M}D$. On ne sait pas dans quel cas on se trouve. Néanmoins, dans un cas comme dans l'autre, le chemin de droite mène au village. Comme on veut atteindre à coup sûr le village, la décision à prendre est indubitable : il faut prendre le chemin de droite.

g) On suppose que les trois participants ont menti. Dans la table de vérité, on voit que ce cas ne se produit que sur une seule ligne, à savoir la ligne $G\overline{M}D$. On peut donc prendre le chemin de gauche, en plus du chemin de droite.

Exercice n° 2. *Exo de logique de CCP 2015*
De nombreux travaux sont réalisés en Intelligence Artificielle pour construire un programme qui imite le raisonnement humain et soit capable de réussir le test de Turing, c'est-à-dire qu'il ne puisse pas être distingué d'un être humain dans une conversation à l'aveugle. Vous êtes chargé(e)s de vérifier la correction des réponses données par un tel programme lors des tests de bon fonctionnement. Dans le scénario de test considéré, le comportement attendu est le respect de la règle suivante : pour chaque question, le programme répondra par trois affirmations dont une seule sera correcte.
Nous noterons A_1, A_2, A_3 les propositions associées aux affirmations effectuées par le programme.

a) Représenter le comportement attendu sous la forme d'une formule du calcul des propositions qui dépend de A_1, A_2 et A_3

1. Premier cas
Vous demandez au programme : *Quels éléments doivent contenir les aliments que je dois consommer pour préserver ma santé ?*
Il répond les affirmations suivantes :
A_1 : Consommez au moins des aliments qui contiennent des glucides, mais pas de lipides !
A_2 : Si vous consommez des aliments qui contiennent des glucides, alors ne consommez pas d'aliments qui contiennent des lipides !
A_3 : Ne consommez aucun aliment qui contient des lipides !

Nous noterons G, respectivement L, les variables propositionnelles qui correspondent au fait de consommer des aliments qui contiennent des glucides, respectivement des lipides.

b) Exprimer A_1, A_2 et A_3 sous la forme de formules du calcul des propositions. Ces formules peuvent dépendre des variables G et L

c) En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les formules de De Morgan), déterminer ce que doivent contenir les aliments que vous devrez consommer pour préserver votre santé.

2. Second cas
Vous demandez au programme : *Quelles activités dois-je pratiquer si je veux préserver ma santé ?*
Suite à une coupure de courant, la dernière affirmation est interrompue.

A_1 : Ne faites des activités sportives que si vous prenez également du repos !
A_2 : Si vous ne faites pas d'activité intellectuelle, alors ne prenez pas de repos !
A_3 : Prenez du repos ou faites des activités ... !

Nous noterons S, I et R les variables propositionnelles qui correspondent au fait de faire des activités sportives, des activités intellectuelles et de prendre du repos.

d) Exprimer A_1, A_2 et A_3 sous la forme de formule du calcul des propositions. Ces formules peuvent dépendre de S, I et R

e) En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les tables de vérité), déterminer quelle(s) activité(s) vous devez pratiquer pour préserver votre santé.

Correction

a) La règle peut s'écrire : $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3$

b) $A_1 = G\overline{L}$
$A_2 = (G \to \overline{L}) = \overline{G} + \overline{L}$
$A_3 = \overline{L}$

c) $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3$

donc $\cancel{G\overline{L}\,\overline{(\overline{G}+\overline{L})}}L + \overline{G\overline{L}}(\overline{G}+\overline{L})L + \overline{G\overline{L}}\,\overline{(\overline{G}+\overline{L})}\,\overline{L}$

donc $(\overline{G}+L)(\overline{G}+\overline{L})L + \cancel{(\overline{G}+L)GL}\,\overline{L}$

donc $(\overline{G}+L)\overline{G}L$

donc $\overline{G}L$

Conclusion : Il convient donc de consommer des lipides mais pas de glucide.

d) $A_1 = (S \to R) = \overline{S} + R$
$A_2 = \overline{I} \to \overline{R} = I + \overline{R}$
$A_3 = R + x$

e) Table de vérité :

S	I	R	A_1	A_2	A_3 si $x = S$	règle si $x = S$	A_3 si $x = I$	règle si $x = I$
0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	0	1	0

Dans le cas où x désigne S, la règle n'est jamais vérifiée. C'est donc que x désigne I.
On constate alors que la règle est vérifiée dans le cas où $S = 1$, $I = 0$ et $R = 0$.
Conclusion : Il convient donc, pour préserver sa santé, de faire des activités sportives sans jamais prendre de repos ni faire d'activités intellectuelles.

Exercice n° 3. *Exercice de logique de CCP 2014*
Dans une association de jeunes détectives, les membres s'entraînent à résoudre des problèmes logiques. Ceux-ci respectent les règles suivantes : « Lors d'une conversation, un même membre aura un comportement constant : il dira toujours la vérité, ou ne dira jamais la vérité. » et « Une conversation ne doit pas être absurde. »

a) Soient n membres intervenant dans une même conversation. Chaque membre est représenté par une variable propositionnelle M_i avec $i \in [\![1, n]\!]$ qui représente le fait que ce membre dit, ou ne dit pas la vérité. Chaque membre fait une seule déclaration représentée par la variable propositionnelle D_i. Représenter le respect des règles dans cette conversation sous la forme d'une formule du calcul des propositions dépendant des variables M_i et D_i avec $i \in [\![1, n]\!]$.

Vous assistez à deux conversations sur la véracité des déclarations de deux groupes de trois membres de cette association. Nous nommerons A, B et C les participants de la première conversation.

A : « Les seuls qui disent la vérité ici sont C et moi. »
B : « C ne dit pas la vérité. »
C : « Soit B dit la vérité. Soit A ne dit pas la vérité. »

Nous noterons A, B et C les variables propositionnelles associées au fait que A, B et C disent respectivement la vérité.
Nous noterons D_A, D_B et D_C les formules du calcul des propositions associées respectivement aux déclarations de A, B et C dans la conversation.

b) Représenter les déclarations de la première conversation sous la forme de formules du calcul des propositions D_A, D_B et D_C dépendant des variables A, B et C.

c) En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les tables de vérité), déterminer si A, B et C disent, ou ne disent pas, la vérité .

Nous nommerons D, E et F les participants de la seconde conversation.
D : « Personne ne doit croire F. »
E : « D et F disent toujours la vérité. »
F : « E dit la vérité. »

Nous noterons D, E et F les variables propositionnelles associées au fait que D, E et F disent respectivement la vérité.
Nous noterons D_D, D_E et D_F les formules du calcul des propositions associées respectivement aux déclarations de D, E et F dans la seconde conversation.

d) Représenter les déclarations de la seconde conversation sous la forme de formules du calcul des propositions D_D, D_E et D_F dépendant des variables D, E et F.

e) En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les formules de De Morgan), déterminer si D, E et F disent, ou ne disent pas, la vérité.

Correction

a) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, l'assertion D_i prononcée par le membre numéro i est vraie si et seulement si ce membre dit la vérité (ce qui est marqué par le variable propositionnelle D_i).

On a donc $\quad \forall i \in [\![1, n]\!] \quad D_i \leftrightarrow M_i$

On peut donc écrire : $\displaystyle\bigwedge_{i=1}^{n} (D_i \leftrightarrow M_i)$

b) $D_A = A\overline{B}C \quad$ (et pas AC)
$D_B = \overline{C}$
$D_C = B \oplus \overline{A} \quad$ ($\oplus$ représente XOR, c'est-à-dire la disjonction exclusive)

c) Table de vérité :

A	B	C	D_A	D_B	D_C	règle
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1	0

On n'arrive pas à conclure complètement. Les informations dont on dispose permettent seulement de dire que A ment et que l'un des autres dit la vérité. Peut-être y avait-il une erreur dans l'énoncé.

d) $D_D = \overline{F}$
$D_E = DF$
$D_F = E$

e) On remarquera que, pour toutes variables propositionnelles P et Q, on a : $(P \leftrightarrow Q) = (PQ + \overline{P}\,\overline{Q})$

On a la règle : $(D \leftrightarrow D_D)(E \leftrightarrow D_E)(F \leftrightarrow D_F)$

donc $(DD_D + \overline{D}\,\overline{D}_D)(ED_E + \overline{E}\,\overline{D}_E)(FD_F + \overline{F}\,\overline{D}_F)$

donc $(D\overline{F} + \overline{D}F)(EDF + \overline{E}\,\overline{DF})(FE + \overline{F}\,\overline{E})$

donc $(D\overline{F} + \overline{D}F)\big(EDF + \overline{E}(\overline{D} + \overline{F})\big)(FE + \overline{F}\,\overline{E})$

donc $(D\overline{F} + \overline{D}F)\big(EDF + \overline{E}\,\overline{D} + \overline{E}\,\overline{F}\big)(FE + \overline{F}\,\overline{E})$

On développe d'abord le produit (c'est-à-dire la conjonction) des deux premières parenthèses (en ne gardant que les termes qui ne s'annulent pas) :

on obtient : $(D\overline{E}\,\overline{F} + \overline{E}\,\overline{D}F)(FE + \overline{F}\,\overline{E})$

donc $D\overline{E}\,\overline{F}$

Conclusion : D dit la vérité alors que E et F mentent.

Exercice n° 4. *Exercice de logique de CCP 2013*

Lors d'une séance d'un jeu informatique dérivé de la mythologie grecque, vous êtes accompagné par un couple de Sphinx. Ces créatures posent des énigmes logiques pour vous aider à progresser dans le jeu. Les énigmes suivent une règle que les Sphinx respectent scrupuleusement. Lorsque les Sphinx énoncent cette règle, ils disent toujours la vérité. Le premier Sphinx qui vous accompagne a énoncé la règle suivante :

« Dans les énigmes, je peux soit dire la vérité, soit mentir. Mais, pour une énigme donnée, la première et la dernière de mes affirmations seront de la même nature (soit vérité, soit mensonge) ; et toutes les autres affirmations seront de la nature opposée à ces deux-là (mensonge, respectivement vérité, si les premières et dernières sont des vérités, respectivement des mensonges). »

a) Considérons que l'un des Sphinx fait une suite de n déclarations A_i dans une même énigme. Proposer une formule du calcul des propositions qui représente la règle qu'il respecte.

Vous vous retrouvez face à trois escaliers, l'un à gauche, l'autre à droite et le dernier au milieu entre les deux autres.

Le premier Sphinx P énonce les affirmations suivantes :
- l'escalier de gauche est sûr ;
- l'escalier du milieu est sûr ou celui de droite n'est pas sûr.

Le second Sphinx S énonce les affirmations suivantes :
- ni l'escalier de gauche, ni celui du milieu ne sont sûrs ;
- si les escaliers de gauche ou de droite sont sûrs, alors l'escalier du milieu est sûr.

Nous noterons G, M et D les variables propositionnelles associées au fait que les escaliers de gauche, du milieu et de droite sont sûrs.

Nous noterons P_1 et P_2, respectivement S_1 et S_2, les formules propositionnelles associées aux déclarations du premier Sphinx, respectivement du second Sphinx.

b) Représenter les déclarations des deux Sphinx sous la forme de formules du calcul des propositions P_1, P_2, S_1 et S_2 dépendant des variables G, M et D

c) Appliquer la règle respectée par les Sphinx que vous avez proposée pour la première question. Nous noterons P, respectivement S, la formule du calcul des propositions dépendant des variables P_1 et P_2, respectivement S_1 et S_2, qui correspond au respect de la règle par le premier Sphinx, respectivement par le second Sphinx, dans cette énigme. Nous noterons R la formule du calcul des propositions dépendant des variables P et S qui décrit le respect global des règles par les deux Sphinx dans cette énigme.

d) En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les tables de vérité), déterminer quel est (ou quels sont) le (ou les) escalier(s) qui est (ou sont) sûr(s) ? Vous indiquerez explicitement les résultats intermédiaires correspondant aux formules P_1, P_2, P, S_1, S_2 et S.

Vous vous retrouvez plus tard face à trois portes de couleurs rouge, verte et bleue.

Seul le premier Sphinx s'exprime et énonce les affirmations suivantes :
- la porte rouge n'est pas sûre ou la porte verte est sûre ;
- si les portes rouge et verte sont sûres, alors la porte bleue n'est pas sûre ;
- la porte verte n'est pas sûre mais la porte bleue est sûre.

Nous noterons P_3, P_4 et P_5 les formules propositionnelles associées aux déclarations du premier Sphinx. Nous noterons R, V et B les variables propositionnelles associées au fait que les portes rouge, verte et bleue sont sûres.

e) Représenter les déclarations du Sphinx sous la forme de formules du calcul des propositions P_3, P_4 et P_5 dépendant des variables R, V et B

f) Appliquer la règle respectée par le premier Sphinx que vous avez proposée pour la première question. Nous noterons P la formule du calcul des propositions dépendant des variables P_3, P_4 et P_5 qui correspond au respect de la règle par le premier Sphinx dans cette énigme.

g) En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les formules de De Morgan), déterminer quelle est (ou quelles sont) la (ou les) porte(s) qui est (ou sont) sûre(s).

Correction

a) La règle que respecte le Sphinx est : $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cdots\overline{A}_{n-1}A_n + \overline{A}_1A_2A_3\cdots A_{n-1}\overline{A}_n$

b) $P_1 = G$
$P_2 = M + \overline{D}$
$S_1 = \overline{G}\,\overline{M}$
$S_2 = \big((G+D) \to M\big) = \overline{G+D} + M = \overline{G}\,\overline{D} + M$

c) $P = P_1P_2 + \overline{P}_1\overline{P}_2$
$S = S_1S_2 + \overline{S}_1\overline{S}_2$
$R = PS$

d) Table de vérité :

G	M	D	P_1	P_2	P	S_1	S_2	S	R
0	0	0	0	1	0	1	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	0	1	0	0

Conclusion : Seul l'escalier de gauche est sûr.

e) $P_3 = \overline{R} + V$
$P_4 = (RV \to \overline{B}) = \overline{RV} + \overline{B} = \overline{R} + \overline{V} + \overline{B}$
$P_5 = \overline{V}B$

f)
$$\begin{aligned}
P &= P_3\,\overline{P}_4\,P_5 + \overline{P}_3\,P_4\,\overline{P}_5\\
&= (\overline{R}+V)\overline{(\overline{R}+\overline{V}+\overline{B})}\,\overline{V}\,B + \overline{\overline{R}+V}(\overline{R}+\overline{V}+\overline{B})\overline{\overline{V}\,B}\\
&= (\overline{R}+V)RVB\overline{V}B + R\overline{V}(\overline{R}+\overline{V}+\overline{B})(V+\overline{B})\\
&= R\overline{V}\,\overline{B}(\overline{R}+\overline{V}+\overline{B})\\
&= R\overline{V}\,\overline{B}
\end{aligned}$$

La seule porte sûre est donc la porte rouge.

Exercice n° 5. *Exercice de logique de CCP 2012*
Vous participez à un concours de mathématiques comportant une partie de raisonnement logique. Plusieurs orateurs font des déclarations et vous devez répondre à des questions en vous appuyant sur des informations déduites de ces déclarations. La règle suivante s'applique : « Les orateurs sont de trois natures : les véridiques, les menteurs et les changeants. Les véridiques disent toujours la vérité, les menteurs mentent toujours, les changeants disent en alternance une vérité et un mensonge (c'est-à-dire, soit une vérité, puis un mensonge, puis une vérité, etc. ; soit un mensonge, puis une vérité, puis un mensonge, etc.). Pendant tout le concours, les orateurs ne peuvent pas changer de nature. »

Les épreuves comportent deux phases :

- Les différents orateurs font plusieurs déclarations dont l'analyse permet de déterminer la nature de chaque orateur (véridique, menteur, changeant commençant par dire la vérité, ou changeant commençant par dire un mensonge).
- Les orateurs font une seconde série de déclarations. Puis, vous devez répondre à des questions en exploitant les informations contenues dans ces déclarations.

a) Dans la première phase, quel est le nombre minimum de déclarations que doit faire chaque orateur pour qu'il soit possible de déterminer sa nature ? Justifier votre réponse.

b) Soit un orateur A qui fait une suite de déclarations A_i. Proposer des formules du calcul des propositions A_V, A_M, A_{CV} et A_{CM} qui permettent de caractériser la nature de A (respectivement véridique, menteur, changeant commençant par dire la vérité, ou changeant commençant par dire un mensonge).

Vous participez à une première épreuve avec un orateur A qui fait les déclarations suivantes :

- J'aime le rouge mais pas le bleu.
- Soit j'aime le rouge, soit j'aime le vert.
- Si j'aime le rouge et le vert, alors j'aime le bleu.

Nous noterons R, V et B les variables propositionnelles associées au fait que l'orateur aime le rouge, le vert ou le bleu.
Nous noterons A_1, A_2 et A_3 les formules propositionnelles associées aux déclarations de A.

c) Représenter les déclarations de l'orateur sous la forme de formules du calcul des propositions A_1, A_2 et A_3 dépendant des variables R, V et B.

d) Appliquer les formules permettant de caractériser la nature des orateurs A_V, A_M, A_{CV} et A_{CM} que vous avez proposées pour la deuxième question pour l'orateur A dépendant des variables A_1, A_2 et A_3

e) En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les tables de vérité), déterminer la nature de l'orateur A. Quelles sont les couleurs qu'aime A ?

Vous participez à une seconde épreuve avec trois orateurs G, H et I. Vous avez déterminé dans la première phase avec succès que G est un menteur, que H est un véridique et que I est un changeant sans avoir s'il doit dire la vérité ou un mensonge pour sa déclaration suivante. Ceux-ci font les déclarations :

- I : « Le losange est visible. »
- G : « Le cercle est visible que si le losange est visible. »
- I : « Le triangle n'est pas visible. »
- H : « Soit le cercle est visible, soit le triangle est visible. »

Nous noterons G_1, H_1, I_1 et I_2 les formules propositionnelles associées aux déclarations des orateurs C, D et E dans cette première épreuve.
Nous noterons C, L et T les variables propositionnelles associées au fait que le cercle, le losange ou le triangle soit visible.

f) Représenter les déclarations des orateurs sous la forme de formules du calcul des propositions G_1, H_1, I_1 et I_2 dépendant des variables C, L et T.

g) Représenter les informations sur la nature des orateurs sous la forme d'une formule du calcul des propositions dépendant des variables G_1, H_1, I_1 et I_2.

h) En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les formules de De Morgan), déterminer quelle est (ou quelles sont) la (ou les) figure(s) visible(s) ainsi que la nature exacte de I l'orateur changeant.

Correction

a) Le nombre minimum de déclarations que doivent faire les orateurs pour que l'on puisse déterminer leur nature est 2. Le tableau suivant indique la nature de l'orateur à partir des valeurs de vérités de ses deux premières déclarations :

$(0,0)$	M	menteur
$(0,1)$	CV	changeant commençant par une vérité
$(1,0)$	CM	changeant commençant pas un mensonge
$(1,1)$	V	véridique

b) $A_V = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \cdots$
$A_M = \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4 \overline{A}_5 \overline{A}_6 \cdots$
$A_{CV} = A_1 \overline{A}_2 A_3 \overline{A}_4 A_5 \overline{A}_6 \cdots$
$A_{CM} = \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 A_4 \overline{A}_5 A_6 \cdots$

c) $A_1 = R\overline{B}$
$A_2 = R \oplus V$ ($\oplus$ représente XOR, c'est-à-dire la disjonction exclusive)
$A_3 = (RV \to B) = (\overline{RV} + B) = (\overline{R} + \overline{V} + B)$

d) $A_V = A_1 A_2 A_3$
$A_M = \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3$
$A_{CV} = A_1 \overline{A}_2 A_3$
$A_{CM} = \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3$

e) Table de vérité :

R	V	B	A_1	A_2	A_3	A_V	A_M	A_{CV}	A_{CM}
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	0	0	0	0

Conclusion : A est véridique et il n'aime que le rouge.

f) $G_1 = (C \to L) = (\overline{C} + L)$
$H_1 = (C \oplus T)$ ($\oplus$ designe XOR, c'est-à-dire la disjonction exclusive)
$I_1 = L$
$I_2 = \overline{T}$

g) Ceux que l'on sait sur la nature des orateurs permet d'écrire :
$\overline{G}_1 H_1 (I_1 \oplus I_2)$

h) On a $\overline{G}_1 H_1 (I_1 \oplus I_2)$
donc $\overline{G}_1 H_1 (I_1 \overline{I}_2 + \overline{I}_1 I_2)$
donc $\overline{\overline{C} + L}(C \oplus T)(LT + \overline{L}\,\overline{T})$
donc $C\overline{L}(C\overline{T} + \overline{C}T)(LT + \overline{L}\,\overline{T})$
donc $C\overline{L}\,\overline{T}(LT + \overline{L}\,\overline{T})$
donc $C\overline{L}\,\overline{T}$
Cnoclusion : Seul le cercle est visible et I est un changeant commençant par mentir.

Exercice n° 6. *Exercice de logique de CCP 2011*
Dans un futur lointain, l'espèce humaine a découvert une autre espèce consciente. L'étude de cette espèce a permis de découvrir qu'elle est capable de percevoir si quelqu'un dit la vérité ou un mensonge. Les membres de cette espèce respectent les règles de politesse suivantes lors des discussions au sein d'un groupe : « Les orateurs doivent rester constants au cours d'une discussion : soit ils disent toujours la vérité, soit ils mentent toujours. De plus, si un orateur dit la vérité alors l'orateur suivant doit également dire la vérité. Si le sujet de la discussion change, les orateurs sont libres de changer leurs comportements. »
Vous assistez à une discussion sur les moyens d'attaque et de défense que peut posséder la faune de cette planète entre trois membres de cette espèce que nous appellerons A, B et C.
A : « Le kjalt peut avoir un dard ou des griffes. »
B : « Non, il n'a pas de dard. »
C : « Il a des pinces et des griffes. »
Nous noterons D, G et P les variables propositionnelles associées au fait qu'un kjalt possède respectivement un dard, des griffes et des pinces.
Nous noterons A_1, B_1 et C_1 les formules propositionnelles associées aux déclarations de A, B et C dans cette première discussion.
C quitte le groupe et la discussion change de sujet pour parler de la flore de la planète.
A : « Un lyop peut être de couleur mauve mais pas de couleur jaune. »
B : « Il ne peut pas être de couleur verte »
A : « Il ne peut être de couleur verte que s'il peut être de couleur jaune. »
Nous noterons J, M et V la variables propositionnelles associées aux déclarations de A et B dans cette seconde discussion.

a) Représenter les règles de politesse appliquées à la première discussion sous la forme de formules du calcul des propositions dépendant des formules A_1, B_1 et C_1.

b) Représenter les informations données par les participants de la première discussion sous la forme de formules du calcul des propositions A_1, B_1 et C_1 dépendant des variables D, G et P

c) En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les formule de De Morgan), déterminer le (ou les) moyen(s) d'attaque et de défense que peut posséder un kjalt.

d) Représenter les règles de politesse appliquées à la seconde discussion sous la forme d'une formule du calcul des propositions dépendant des formules A_2, A_3 et B_2

e) Représenter les informations données par les participants lors de la seconde discussion sous la forme de trois formules du calcul des propositions A_2, A_3 et B_2 dépendant des variables J, M et V.

f) En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les tables de vérité), déterminer la (ou les) couleur(s) possible(s) pour un lyop.

Correction

a) Les règles de politesse des orateurs se traduisent par : $(A_1 \rightarrow B_1)(B_1 \rightarrow C_1)$

b) $A_1 = D + G$
$B_1 = \overline{D}$
$C_1 = PG$

c) Les affirmations suivantes sont vraies :
$(A_1 \rightarrow B_1)(B_1 \rightarrow C_1)$
$(\overline{A}_1 + B_1)(\overline{B}_1 + C_1)$
$(\overline{D+G} + \overline{D})(D + PG)$
$(\overline{D}\,\overline{G} + \overline{D})(D + PG)$
$\overline{D} \cdot (\overline{G} + 1)(D + PG)$
$\overline{D}(D + PG)$
$\overline{D}\,D + \overline{D}PG$
$\overline{D}PG$

Conclusion : Le kjalt n'a pas de dard mais des griffes et des pinces.

d) Les règles de politesse des orateurs se traduisent par : $(A_2 \leftrightarrow A_3)(A_2 \rightarrow B_2)(B_2 \rightarrow A_3)$
Cela revient bien entendu à dire que les trois déclarations sont toutes les trois vraies ou bien toutes les trois fausses.

e) A_2 : « Un lyop peut être de couleur mauve mais pas de couleur jaune. »
A_2 : « Il existe des lyops mauves et il n'existe pas de lyop jaune. »
$A_2 = M\,\overline{J}$

B_2 : « [Un lyop] ne peut pas être de couleur verte. »
B_2 : « Il n'existe pas de lyop de couleur verte. »
$B_2 = \overline{V}$

A_3 : « [Un lyop] ne peut être de couleur verte que s'il peut être de couleur jaune. »
A_3 : « Il n'existe des lyops de couleur verte que si il existe des lyops de couleur jaune. »
A_3 : « "Il existe des lyops de couleur verte." $\Longrightarrow$ "Il existe des lyops de couleur jaune." »
$A_3 = (V \rightarrow J) = (\overline{V} + J)$

f) Table de vérité :

J	M	V	A_2	B_2	A_3
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1

L'interprétation est délicate : on n'arrive pas à conclure si les deux orateurs ont dit vrai à chaque fois ou bien, au contraire, ont menti à chaque fois.

Dans le premier cas, il faudrait conclure que les lyops peuvent être mauves mais ni jaunes, ni verts.

Dans le deuxième cas, il faudrait conclure que les lyops peuvent être verts, mais ni jaunes, ni verts.

Tout ce que l'on peut conclure que l'écoute de la conversation est donc que les lyops ne peuvent certainement pas être jaunes : on est certain de ne jamais rencontrer de lyop jaune.

Exercice n° 7. *Exo de logique de CCP 2010*
Les universités anglophones nord-américaines sont célèbres pour leurs associations estudiantines, les fraternités, ou sororités. Celles-ci développement souvent une culture du secret.
Vous venez de rejoindre la fraternité $\Gamma\alpha\chi$. Lors de votre initiation, vous avez appris les règles gouvernant les discussions pour que seuls les membres puissent en comprendre le contenu. Lorsque plusieurs membres prennent la parole sur un sujet donné, soit ils disent tous la vérité, soit ils mentent tous. Si quelqu'un intervient sur plusieurs sujets, il peut avoir un rôle différent pour chaque sujet.
Pour être définitivement admis, vous devez démontrer votre maîtrise de ces règles. Vous participez à une discussion avec trois membres de la fraternité que appellerons A, B et C. Ceux-ci vous indiquent comment rejoindre la salle d'intronisation. Si vous n'arrivez pas à rejoindre directement cette salle, vous ne serez pas admis.
Un premier sujet est abordé concernant la pièce dans laquelle se tiendra la cérémonie :
A : « La cérémonie se tiendra dans le gymnase »
C : « Non, elle ne se tiendra pas cette pièce »
A : « Ou alors dans le réfectoire »

Nous noterons G et R les variables propositionnelles associées à la pièce où se tiendra la cérémonie. Nous noterons A_1 et C_1 les formules propositionnelles correspondant aux affirmations de A et C sur le premier sujet.

Puis un second sujet est traité concernant les escaliers qui permettent de rejoindre la pièce où se tiendra la cérémonie.
A : « Le premier escalier conduit à l'intronisation »
C : « Tu as raison »
A : « Le troisième escalier y conduit aussi »
B : « Si le deuxième escalier y conduit, alors le troisième n'y conduit pas »
C : « Le deuxième n'y conduit pas »

Nous noterons E_1, E_2, E_3 les variables propositionnelles correspondant au fait que le premier, le deuxième, le troisième escalier conduisent à la salle de cérémonie.
Nous noterons A_2, B_2 et C_2 les formules propositionnelles correspondant aux affirmations de A, B et C sur le second sujet.

a) Représenter le premier sujet abordé sous la forme d'une formule du calcul des propositions dépendant des formules A_1 et C_1
b) Représenter les informations données par les participants sous la forme de deux formules du calcul des propositions A_1 et C_1 dépendant des variables G et R
c) En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les formules de De Morgan), déterminer dans quelle pièce vous devez vous rendre pour rejoindre la cérémonie.
d) Représenter le second sujet abordé sous la forme d'une formule du calcul des propositions dépendant des formules A_2, B_2 et C_2
e) Représenter les informations données par les participants sous la forme de trois formules du calcul des propositions A_2, B_2 et C_2 dépendant des variables E_1, E_2 et E_3
f) En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les tables de vérité), déterminer l'escalier que vous devez suivre pour rejoindre la cérémonie.

g) En admettant que les trois participants aient menti, pouviez-vous prendre d'autres escaliers ? Si oui, le ou lesquels ?

Correction

a) La règle appliquée au premier sujet donne : $A_1C_1 + \overline{A}_1\overline{C}_1$

b) $A_1 = G + R$
$C_1 = \overline{G}$

c) $A_1C_1 + \overline{A}_1\overline{C}_1$

donc $(G+R)\overline{G} + \overline{G+R}\,G$

donc $G\overline{G} + R\overline{G} + \overline{G}\,\overline{R}G$

donc $R\overline{G}$

Conclusion : La cérémonie se tiendra dans le réfectoire (et pas dans le gymnase).

d) La règle appliquée au deuxième sujet donne : $A_2B_2C_2 + \overline{A}_2\overline{B}_2\overline{C}_2$

e) $A_2 = E_1E_3$
$B_2 = (E_2 \to \overline{E}_3) = \overline{E}_2 + \overline{E}_3$
$C_2 = E_1\overline{E}_2$

f) Table de vérité

E_1	E_2	E_3	A_2	B_2	C_2	règle
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0	0

On ne peut savoir si les trois participants ont menti ou bien si ils ont tous les trois dit la vérité mais, dans les deux cas, le couloir n° 3 mène à la pièce d'intronisation.

Conclusion : Il faut prendre le troisième couloir.

g) Dans le cas où les trois participants ont menti, les couloirs qui mènent à la salle d'intronisation sont exactement les couloirs n^{os} 2 et 3.

Exercice n° 8. *Exo de logique de CCP 2009*
Vous êtes l'ambassadeur de la fédération des planètes unies auprès d'une civilisation extra-terrestre particulièrement susceptible. Il est extrêmement important de respecter leur protocole en ce qui concerne la couleur des vêtements. Pour éviter des incompréhensions, vous disposez d'un assistant de la dernière génération d'intelligence artificielle bio-électronique qui contient toutes les informations disponibles sur leur culture. Mais celui-ci semble perturbé depuis votre arrivée. Il vous donne systématiquement trois affirmations dont exactement l'une des trois est correcte et les deux autres fausses.
Nous noterons A_1, A_2 et A_3 les propositions associées aux trois affirmations communiquées par votre assistant.

a) Représenter cette règle sous la forme d'une formule du calcul des propositions dépendant de A_1, A_2 et A_3.

Vous devez d'abord rencontrer le gouverneur de la capitale qui est le seul à pouvoir vous obtenir un contact avec le conseil des sages. Votre assistant vous donne les indications suivantes :

- Porte au moins un vêtement de couleur claire, mais aucun vêtement de couleur sombre !
- Si tu portes au moins un vêtement de couleur claire alors ne porte aucun vêtement de couleur sombre !
- Ne porte aucun vêtement de couleur sombre !

Nous noterons C, respectivement S, les variables propositionnelles correspondant au fait de porter au moins un vêtement de couleur claire, respectivement sombre.

b) Exprimer A_1, A_2 et A_3 sous la forme de formules du calcul des propositions dépendant de C et de S.

c) En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les formules de De Morgan), déterminer quelle(s) couleur(s) de vêtement vous devez porter pour rencontrer le gouverneur.

Grâce à ces conseils avisés, vous obtenez un rendez-vous avec le conseil. Vous disposer de vêtements de couleur rouge, verte et bleue. Votre assistant vous transmet ses conseils mais la communication est brouillée juste à la fin et vous ne pouvez plus le contacter avant l'heure du rendez-vous. Voici ce que vous avez réussi à comprendre :

- Ne porte un vêtement de couleur rouge que si tu portes un vêtement de couleur bleue !
- Si tu ne portes pas de vêtement de couleur verte alors ne porte pas de vêtement de couleur bleue !
- Porte au moins un vêtement de couleur bleue ou de couleur ... !

Nous noterons R, V et B les variables propositionnelles correspondant au fait de porter au moins un vêtement de couleur rouge, verte et bleue.

d) Exprimer A_1, A_2 et A_3 sous la forme du calcul des propositions dépendant de R, V et B

e) En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les tables de vérité), déterminer quelle(s) couleur(s) de vêtement vous devez porter pour votre entrevue avec le conseil des sages.

Correction

a) La règle s'écrit $\quad R = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3$

b) $A_1 = C\overline{S}$
$A_2 = (C \rightarrow \overline{S}) = \overline{C} + \overline{S}$
$A_3 = \overline{S}$

c) On a $\quad A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3$
donc $\quad C\overline{S}\,\overline{\overline{C} + \overline{S}}S + \overline{C\overline{S}}(\overline{C} + \overline{S})S + \overline{C\overline{S}}(\overline{\overline{C} + \overline{S}})\overline{S}$
donc $\quad \cancel{C\overline{S}CSS} + (\overline{C} + S)(\overline{C} + \overline{S})S + \cancel{(\overline{C} + S)CSS}$
donc $\quad (\overline{C} + S)(\overline{C} + \overline{S})S$
donc $\quad \overline{C}\,\overline{C}S + \cancel{\overline{C}\,\overline{S}S} + S\overline{C}S + \cancel{S\overline{S}S}$
donc $\quad \overline{C}S$
Conclusion : Il faut porter un vêtement de couleur sombre et aucun de couleur claire.

d) $A_1 = B + \overline{R} \qquad (A_1$ peut donc aussi s'écrire : $R \rightarrow B)$
$A_2 = (\overline{V} \rightarrow \overline{B}) = V + \overline{B}$
$A_3 = B + x$

Il ne faut pas remplacer les points de suspension par une expression booléenne de B, R et V.

e) On distingue trois cas suivant la couleur représentée par x

- 1[er] cas : $x = R$

R	V	B	A_1	A_2	A_3	R
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0

Dans aucun cas la règle n'est respectée : on ne peut donc pas avoir $x = R$

- 2ᵉ cas : $x = V$

R	V	B	A_1	A_2	A_3	R
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0

Un seul choix de couleurs permet de respecter la règle : celui où $(R, V, B) = (1, 0, 0)$

- 3ᵉ cas : $x = B$
On hésite à considérer ce cas, car l'« assistant de la dernière génération d'intelligence artificielle bio-électronique », aussi bête soit-il, n'aurait quand même pas dit, dans sa troisième affirmation : « Porte au moins un vêtement de couleur bleue ou de couleur bleue ! ».

R	V	B	A_1	A_2	A_3	R
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	0

Comme on le voit, il y aurait, dans ce 3ᵉ cas, deux choix de couleurs satisfaisant la règle. Vu le caractère particulièrement « susceptible » de cette « civilisation extra-terrestre », on peut penser que leur protocole ne laisse aucune latitude dans les couleurs des habits.

On rejette donc ce 3ᵉ cas pour deux bonnes raisons.

Conclusion : Il faut s'habiller entièrement en rouge.

Exercice nº 9. *Exercice de logique de CCP 2008*
Les jeux virtuels sur ordinateur font souvent appel à des énigmes logiques régies par le calcul des propositions. Vous participez actuellement à une partie dont les règles sont les suivantes :

Les propositions composant une énigme sont alternativement vraies et fausses, c'est-à-dire que :
- soit les propositions de numéro pair sont vraies et les propositions de numéro impair fausses ;
- soit les propositions de numéro pair sont fausses et les propositions de numéro impair vraies.

Dans un labyrinthe, vous vous retrouvez bloqué dans une salle face à une porte sur laquelle se trouvent deux interrupteurs étiquetés A et B en position ouverte. Sur un seuil figure l'inscription suivante :

Pour ouvrir la porte :
- P_1 : Il faut fermer l'interrupteur A.
- P_2 : Il faut fermer simultanément les interrupteurs A et B.
- P_3 : Il ne faut pas fermer l'interrupteur B.

Attention, en cas d'erreur la salle s'auto-détruira...

a) Exprimer P_1, P_2 et P_3 sous la forme de formules des propositions dépendant de A et de B.
b) Exprimer la règle du jeu dans le contexte des propositions P_1, P_2 et P_3
c) En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les formules de De Morgan ou table de vérité), déterminer l'action à effectuer pour ouvrir la porte.

Suit une question faisant référence à une partie du programme de MP supprimée dans la nouvelle version.

Correction

a) $P_1 = A$
$P_2 = AB$
$P_3 = \overline{B}$

b) La règle s'écrit $\quad P_1\overline{P}_2P_3 + \overline{P}_1P_2\overline{P}_3$

c) On a $\quad P_1\overline{P}_2P_3 + \overline{P}_1P_2\overline{P}_3$

donc $\quad A\overline{AB}\,\overline{B} + \cancel{\overline{A}\,ABB}$

donc $\quad A(\overline{A} + \overline{B})\overline{B}$

donc $\quad A\overline{B}$

Conclusion : Il faut fermer l'interrupteur A mais pas le B.

Exercice n° 10. *Exercice de logique de CCP 2003*
Dans l'Égypte ancienne, la protection de la tombe des Pharaons faisait l'objet d'une grande attention. Le sarcophage était porté dans la salle funéraire par des esclaves accompagnés d'un prêtre. Le couloir y conduisant était définitivement condamné après leur passage. Les esclaves étaient ensuite abandonnés dans la salle funéraire et le prêtre quittait le tombeau par un passage secret. Pour éviter que les esclaves et les éventuels pillards puissent emprunter le même passage, celui-ci était fermé par plusieurs portes dont l'ouverture demandait la réponse à des énigmes, celles-ci étaient régies par des règles propres à chaque tombe et connues uniquement du prêtre et de son ordre.
Vous faites partie d'une équipe d'archéologues qui explore un tombeau récemment découvert grâce au déchiffrage d'un manuscrit écrit en hiéroglyphes contenant l'emplacement du tombeau et la précieuse règle nécessaire à la résolution des énigmes : « Chaque énigme sera composée de trois affirmations. Une affirmation parmi les trois sera toujours fausse, les deux autres seront toujours vraies. Attention, ce ne seront pas forcément toujours les mêmes. »
Votre équipe a réussi à déblayer l'entrée de la salle funéraire et vous vous y êtes précipités trop imprudemment. En effet, la galerie, mal étayée, s'est effondrée après votre passage. Vous ne disposez pas de suffisamment d'air pour attendre que vos collègues dégagent à nouveau le passage. Votre seule chance de survie est d'emprunter le passage secret usuellement réservé au prêtre. Nous noterons A_1, A_2 et A_3 les propositions associées aux trois affirmations contenues dans les énigmes apparaissant sur chaque porte.

a) Représenter la règle sous la forme d'une formule du calcul des propositions dépendant de A_1, A_2 et A_3.

Une première porte bloque le passage. Devant cette porte se trouvent une dalle blanche et une dalle noire. Les affirmations sont inscrites sur la porte :

- Si tu poses le pied sur la dalle blanche, alors pose le pied sur la dalle noire !
- Pose les pieds simultanément sur les dalles blanche et noire !
- Pose le pied sur la dalle noire !

Nous noterons B, respectivement N, les variables propositionnelles correspondent au fait de poser le pied sur la dalle blanche, respectivement noire.

b) Exprimer A_1, A_2 et A_3 sous la forme de formules du calcul des propositions dépendant de B et N

c) En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les formules de De Morgan), déterminer la (ou les) dalle(s) sur laquelle (lesquelles) vous devez poser les pieds pour ouvrir cette porte.

La porte s'ouvre, puis se referme après votre passage. Une seconde porte se trouve maintenant face à vous. Sur le côté de la porte se trouvent trois pavés de tailles différentes (petit, moyen, gros). Trois affirmations sont inscrites sur la porte. Malheureusement, un des hiéroglyphes est illisible. Voici les textes que vous arrivez à déchiffrer :

- L'affirmation suivante est fausse : N'appuie sur le petit pavé que si tu as appuyé sur le gros pavé !
- N'appuie pas sur le moyen pavé mais appuie sur le gros pavé !
- N'appuie ni sur le gros pavé, ni sur le ... pavé !

Les hiéroglyphes vous permettent de savoir que ... correspond soit à *gros*, soit à *moyen*, soit à *petit*.
Nous noterons P, M et G les variables propositionnelles correspondant au fait d'appuyer sur le petit, le moyen ou le gros pavé.

d) Exprimer A_1, A_2 et A_3 sous la forme de formules du calcul des propositions dépendant de P, M et G

e) En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les tables de vérité), déterminer le (ou les) pavé(s) sur lequel (ou lesquels) vous devez appuyer pour ouvrir cette porte.

Correction

a) La règle s'écrit $\overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + A_1 A_2 \overline{A}_3$

b) $A_1 = (B \to N) = \overline{B} + N$
$A_2 = BN$
$A_3 = N$

c) On a $\overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + A_1 A_2 \overline{A}_3$
donc $\overline{\overline{B} + N} BNN + (\overline{B} + N)\overline{BN}N + \cancel{(\overline{B} + N)BN\,\overline{N}}$
donc $\cancel{(B\overline{N})(BN)} + (\overline{B} + N)(\overline{B} + \overline{N})N$
donc $(\overline{B} + N)\overline{B}N$
donc $\overline{B}N + \overline{B}N$
donc $\overline{B}N$
Conclusion : Il faut donc appuyer sur la dalle noire et ne pas appuyer sur la dalle blanche.

d) $A_1 = \overline{P \to G} = \overline{\overline{P} + G} = P\overline{G}$
$A_2 = \overline{M}G$
$A_3 = \overline{G}\,\overline{x}$

e) Il faut distinguer trois cas suivant la variable propositionnelle que représente le symbole x

P	M	G	A_1	A_2	A_3 si $x = P$	A_3 si $x = M$	A_3 si $x = G$
0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	0

On peut légitimement considérer que le cas où $x = G$ est à exclure car on imagine mal qu'il puisse être écrit sur le seuil : « n'appuie ni sur le gros pavé, ni sur le gros pavé ! »

Seul le cas où $x = M$ permet alors d'avoir une configuration où la règle est respectée, celle où $(P, M, G) = (1, 0, 0)$

Conclusion : Il faut appuyer uniquement sur le petit pavé.

Exercice n° 11. *Exercice de logique de CCP 2002*
Lors de ses aventures au pays des merveilles rapportées par Lewis Carroll, Alice est souvent accompagnée par le chat de Cheshire. Ce félin énigmatique s'exprime sous la forme d'affirmations logiques qui sont toujours vraies.
Alice se trouve dans un corridor dont toutes les portes à sa taille sont fermées. La seule porte ouverte est nettement trop petite pour qu'elle puisse l'emprunter. Une étagère est fixée au-dessus de cette porte. Le chat dit alors à Alice : « L'un des flacons posés sur cette étagère contient un liquide qui te permettra de prendre une taille plus adéquate. Mais attention, les autres flacons peuvent contenir un poison fatal. »
Trois flacons sont effectivement posés sur l'étagère. Le premier est rouge, le second jaune, le troisième bleu. Une étiquette est collée sur chaque flacon. Alice lit l'inscription figurant sur chaque étiquette :

- Flacon rouge : Le flacon jaune contient un poison. Le flacon bleu ne contient pas un poison.
- Flacon jaune : Si le flacon rouge contient un poison, alors le flacon bleu aussi.
- Flacon bleu : Je ne contiens pas un poison, mais au moins l'un des deux autres flacons contient un poison.

Nous noterons R, J et B les variables propositionnelles correspondant au fait que les flacons rouge, jaune et bleu contiennent un poison.
Nous noterons I_R, I_J et I_B les propositions correspondant aux inscriptions sur les flacons rouge, jaune et bleu.

a) Exprimer I_R, I_J et I_B sous la forme de formules du calcul des propositions dépendant de R, J et B

Traduire les questions suivantes en formules du calcul des propositions puis résoudre les problèmes posés en utilisant le calcul des propositions (formules de De Morgan ou tables de vérité).

b) Les inscriptions sur les trois flacons sont-elles compatibles (c'est-à-dire, peuvent-elles être toutes vraies) ?

c) Est-ce que les inscriptions sont dépendantes, c'est-à-dire est-ce qu'une inscription est impliquée par la conjonction des deux autres ? Si oui, préciser la (ou les) dépendance(s).

d) Dans le cas où aucun des trois flacons ne contient un poison, est-ce qu'une ou plusieurs inscriptions sont fausses ? Si oui, laquelle ou lesquelles ?

e) Si les trois inscriptions sont vraies, est-ce qu'un ou plusieurs flacons contiennent un poison ? Si oui, lequel ou lesquels ?

f) Si seuls les flacons ne contenant pas un poison ont une inscription vraie, est-ce qu'un ou plusieurs flacons ne contiennent pas un poison ? Si oui, lequel ou lesquels ?

Correction

a) $I_R = J\overline{B}$
$I_J = (R \to B) = \overline{R} + B$
$I_B = \overline{B}(J+R)$

b)
$$\begin{aligned} I_R I_J I_B &= J\overline{B}(\overline{R}+B)\overline{B}(J+R) \\ &= J\overline{B}(\overline{R}+B)(J+R) \\ &= J\overline{B}\,\overline{R}(J+R) \\ &= J\overline{B}\,\overline{R} \end{aligned}$$

Les trois indications sont donc compatibles puisqu'elles peuvent être toutes les trois vraies en même temps $\big($dans le cas où $(J,B,R) = (1,0,0)\big)$

c)
- On constate immédiatement que $I_R \to I_B$ et donc $(I_R I_J) \to I_B$
- On suppose maintenant que I_R et I_B sont vraies.
  Comme on vu que I_R implique I_B, cela revient à supposer que I_R vraie, c'est-à-dire $J = 1$ et $B = 0$
  On ne peut pas en déduire $(R \to B)$, car dans le cas où $R = 1$, l'implication $R \to B$ est fausse.
- On suppose maintenant que I_J et I_B sont vraies.
  Comme on a I_B, on en déduit que $B = 0$ et que l'on a $J = 1$ ou bien $R = 1$
  - ⋆ Si $J = 1$, on a bien I_R vraie.
  - ⋆ Si $R = 1$, comme on a $R \to B$, on en déduit que $B = 1$ en contradiction avec $B = 0$
    Ce cas est donc impossible.

  I_J et I_B impliquent bien I_R est donc $(I_J I_B) \to I_R$

d) On suppose que $(R,J,B) = (0,0,0)$
Alors I_R et I_B sont fausses mais I_J est vraie (puique $0 \to 0 = 1$: *ex falso quodlibet*)

e) On a vu que $I_R I_J I_B = J\overline{B}\,\overline{R}$
Donc, dans le cas où les trois indications sont vraies, le flacon jaune contient un poison au contraire des deux autres.

f) On suppose que $(I_R \oplus R)(I_J \oplus J)(I_B \oplus B)$

donc $(I_R\overline{R} + \overline{I}_R R)(I_J\overline{J} + \overline{I}_J J)(I_B\overline{B} + \overline{I}_B B)$

donc $(J\overline{B}\,\overline{R} + \overline{J\overline{B}}R)\big((\overline{R}+B)\overline{J} + \overline{\overline{R}+B}J\big)\big(\overline{B}(J+R)\overline{B} + \overline{\overline{B}(J+R)}B\big)$

donc $\big(J\overline{B}\,\overline{R} + (\overline{J}+B)R\big)\big(\overline{R}\,\overline{J} + B\overline{J} + R\overline{B}J\big)\big(\overline{B}J + \overline{B}R + (B + \overline{J}\,\overline{R})B\big)$

donc $\big(J\overline{B}\,\overline{R} + \overline{J}R + BR\big)\big(\overline{R}\,\overline{J} + B\overline{J} + R\overline{B}J\big)\big(\overline{B}J + \overline{B}R + B + \overline{J}\,\overline{R}B\big)$

donc $B\overline{J}R\big(\overline{B}J + \overline{B}R + B\big)$

donc $B\overline{J}R$

Conclusion : Les flacons bleus et rouges contiennent un poison contrairement au jaune.

Exercice n° 12. *Exercice de logique de CCP 2001*
Dans la mythologie grecque, l'accès aux Enfers est gardé par le Cerbère, un terrible loup à trois têtes. Celui-ci se trouve devant trois couloirs qui, soit permettent de rejoindre le monde des vivants, soit conduisent directement aux Enfers.
Lorsque Cerbère accueille un nouvel arrivant, il est contraint de lui dire la vérité. Par la suite, il peut mentir ou dire la vérité à sa guise mais il respecte toujours les règles qu'il s'est fixées.
Après avoir bu la coupe de ciguë, Socrate se retrouve face à Cerbère. Celui-ci, honoré de rencontrer le grand philosophe, veut lui offrir une chance d'éviter la damnation éternalle. Il lui dit alors : « Je vais t'indiquer un des couloirs qui mène au monde des vivants mais, pour mettre à l'épreuve ta grande sagesse, j'énoncerai trois indications logiques qui seront, soit toutes vraies, soit toutes fausses et tu en déduiras le couloir que tu devras suivre ».
Nous noterons I_1, I_2 et I_3 les propositions associées aux indications de la première, la deuxième et la troisième tête de Cerbère.

a) Représenter l'énoncé de Cerbère sous la forme d'une formule du calcul des propositions dépendant de I_1, I_2 et I_3.

La première tête dit ensuite : « Le premier couloir ainsi que le troisième mènent au mondes des vivants ».
La deuxième tête dit : « Si le deuxième couloir mène au monde des vivants, alors le troisième n'y mène pas ».
La troisième tête conlut par : « Le premier couloir mène au monde des vivants, par contre le deuxième n'y mène pas ».

Nous noterons C_1, C_2 et C_3 les variables propositionnelles correspondant au fait que le premier, le deuxième et le troisième couloir mènent au monde des vivants.

b) Exprimer I_1, I_2 et I_3 sous la forme de formules du calcul des propositions dépendant de C_1, C_2 et C_3
c) En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les tables de vérité), déterminer le couloir que Socrate doit suivre pour rejoindre le monde des vivants.
d) En admettant que Cerbère ait menti en donnant les trois indications, Socrate pouvait-il suivre d'autres couloirs ? Si oui, le ou lesquels ?

Correction

a) La règle s'écrit $\quad R = I_1 I_2 I_3 + \bar{I}_1 \bar{I}_2 \bar{I}_3$

b) $I_1 = C_1 C_3$
$I_2 = (C_2 \to \overline{C}_3) = \overline{C}_2 + \overline{C}_3$
$I_3 = C_1 \overline{C}_2$

c) Table de vérité :

C_1	C_2	C_3	I_1	I_2	I_3	R
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0	0

Il y a deux lignes pour lesquelles la règle R est satisfaite, à savoir les lignes où le triplet (C_1, C_2, C_3) vaut $(0, 1, 1)$ et celle où il vaut $(1, 0, 1)$.
Dans l'un comme dans l'autre cas, il y a deux couloirs qui mènent au monde des vivants, mais seul le couloir C_3 convient dans les deux cas. Par conséquent, pour être certain de pouvoir rejoindre le monde des vivants, Socrate doit choisir le couloir n° 3.

d) Supposer que Cerbère ait menti, c'est supposer que les trois têtes de Cerbère aient toutes les trois menti. Une seule ligne de la table de vérité correspond à cette possibilité, à savoir la ligne où (C_1, C_2, C_3) vaut $(0, 1, 1)$. Dans ce cas, outre le couloir n° 3, le couloir n° 2 conduit au monde des vivants.

Exercice n° 13. *Exercice de logique de CCP 2000*
La civilisation Atlante est célèbre pour son niveau scientifique et son goût pour les énigmes logiques. Chaque laboratoire Atlante protégeait ses découvertes par une énigme. Pour accéder aux découvertes d'un laboratoire, il fallait répondre correctement à l'énigme. Si la solution proposé était incorrecte, le contenu du laboratoire était détruit. L'interprétation des énigmes (c'est-à-dire les valeurs de vérité associées à chaque proposition composant une énigme) était gérée par des règles propres à chaque laboratoire. Ces régles étaient inscrites sur le seuil de chaque laboratoire.
Un groupe d'archéologues vient de mettre à jour la porte d'un laboratoire Atlante dont le contenu est intact. Sur son seuil figure l'inscription suivante :

Les propositions comportant une énigme sont alternativement vraies et fausses, c'est-à-dire que :
- *soit les propositions de numéro pair sont vraies et les propositions de numéro impair fausses,*
- *soit les propositions de numéro pair sont fausses et les propositions de numéro impair vraies.*

Les archéoloques arrivent au sas conduisant aux découvertes du laboratoire. Sur la porte se trouvent deux leviers en position hautes étiquetés A et B ainsi que les trois propositions suivantes :

P_1 : Il faut baisser le levier A.
P_2 : Il faut baisser simultanément les leviers A et B.
P_3 : Il ne faut pas baisser le levier B.

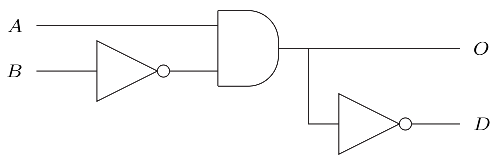
a) Exprimer P_1, P_2 et P_3 sous la forme de formules du calcul des propositions dépendant de A et de B
b) Exprimer la règle figurant sur le seuil de la porte du laboratoire dans le contexte des propositions P_1, P_2 et P_3
c) En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les formules de De Morgan ou table de vérité), déterminer l'action à effectuer pour ouvrir la porte du sas sans détruire le contenu du laboratoire.
d) *Question hors programme depuis la réforme de 2015*
Les leviers A et B sont des interrupteurs qui laissent passer un courant (valeur logique vraie) quand ils sont abaissés. Proposer un circuit électronique composé de portes logiques comportant deux sorties O et D. La sortie O laisse passer le courant pour ouvrir le sas sans détruire le contenu. La sortie D laisse passer le courant pour détruire le contenu du laboratoire.

Correction

a) $P_1 = A$
$P_2 = AB$
$P_3 = \overline{B}$

b) Du fait de la règle, on a : $P_1\overline{P}_2P_3 + \overline{P}_1P_2\overline{P}_3$
donc $A\overline{AB}\,\overline{B} + \cancel{\overline{A}ABB}$
donc $A(\overline{A} + \overline{B})\,\overline{B}$
donc $A\overline{B}$
Conclusion : Il faut baisser le levier A et laisser le levier B en haut.

c) On peut proposer le circuit suivant :



Exercice n° 14. *Exercice de logique de CCP 1999*
Une nouvelle série de composants informatiques dédiés au raisonnement logique a été conçue de manière à faciliter la détection de pannes. Chaque processeur effectue des raisonnements logiques et peut être, soit en état de fonctionnement normal, soit en état de panne. Il se comporte alors de la manière suivante :
- un processeur en état de fonctionnement normal ne peut affirmer que des propositions vraies ;
- un processeur en état de panne ne peut affirmer que des propositions fausses.

Un ordinateur est composé de trois processeurs qui possèdent la même mémoire, donc les mêmes connaissances. Périodiquement, un ingénieur vient interroger l'ordinateur pour déterminer si certains processeurs sont en état de panne.

Lors d'une séance de test, l'ingénieur pose les deux questions suivantes au processeur n° 1 :

- « Est-ce que les processeurs n° 2 et n° 3 sont en état de fonctionnement normal ? »
- « Est-ce que le processeur n° 2 est en état de fonctionnement normal ? »

La processeur n° 1 répond à la première question : « Les processeurs n° 2 et n° 3 sont en état de fonctionnement normal. »
Puis, répond à la deuxième question : « Le processeur n° 2 est en état de panne. »

Nous noterons P_1 (respectivement P_2 et P_3) la proposition « le processeur n° 1 (respectivement n° 2 et n° 3) est état de panne ».

Nous supposerons que l'état des trois processeurs ne peut pas changer entre les réponses aux deux questions.

a) Exprimer la réponse à la première question sous la forme d'une formule du calcul des propositions.
b) Exprimer la réponse à la deuxième question sous la forme d'une formule du calcul des propositions.
c) En utilisant le calcul des propositions (table de vérité ou formule de De Morgan), déterminer l'état de chaque processeur.

Correction

a) La réponse à la première question est : $R_1 = \overline{P}_2\overline{P}_3$
b) La réponse à la deuxième question est : $R_2 = P_2$
c) Le processeur n° 1 est, soit en état de fonctionnement et alors ses deux réponses sont vraies, soit en état de panne et alors ses deux réponses sont fausses.

On a donc $\quad R_1R_2 + \overline{R}_1\overline{R}_2$

donc $\quad \cancel{\overline{P}_2\overline{P}_3P_2} + \overline{\overline{P}_2\overline{P}_3}\,\overline{P}_2$

donc $\quad (P_2 + P_3)\overline{P}_2$

donc $\quad P_3\overline{P}_2$

Conclusion : Le processeur n° 2 est donc en état de fonctionnement et le processeur n° 3 est en état de panne. Le processeur n° 1 ayant donné des informations fausses, il est en état de panne.